Teorie grafů

Metodický koncept k efektivní podpoře klíčových odborných kompetencí s využitím cizího jazyka ATCZ62 - CLIL jako výuková strategie na vysoké škole

Interreg
EVROPSKÁ UNIE
Rakousko-Česká republika
Evropský fond pro regionální rozvoj

Europäische Union
Evropská unie
Europäischer Fonds für regionale Entwicklung
Evropský fond pro regionální rozvoj

VŠTE
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES UPPER AUSTRIA

Teorie grafů

- Graf – uspořádaná dvojice *(V, E)*, kde
  - *V* je množina vrcholů
  - *E* je množina hran, každá hrana je určena právě dvěma vrcholy, volitelně pak směrem nebo váhou
- Typy hran
  - Orientovaná – uspořádaná dvojice vrcholů *(u,v),* kde *u* je počátek, *v* je cíl
  - Neorientovaná - uspořádaná dvojice vrcholů *(u,v)*
  - Smyčky – hrana začíná a končí ve stejném vrcholu
  - Multihrana (násobná, paralelní, rovnoběžná) – mezi vrcholy *(u,v)* vede více hran

Interreg
Rakousko-Česká republika
Evropský fond pro regionální rozvoj
Europäische Union
Evropská unie
Europäischer Fonds für regionale Entwicklung
Evropský fond pro regionální rozvoj
VŠTE
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES UPPER AUSTRIA

Teorie grafů

- Typy grafů
  - Orientovaný – všechny hrany jsou orientované
  - Neorientovaný – všechny hrany jsou neorientované
  - Multigraf – obsahuje multihrany
- Terminologie
  - Sousedství
    - Všechny vrcholy, se kterými daný vrchol sousedí
    - Pokud dva vrcholy jsou spojeny hranou, tak spolu sousedí
  - Stupeň – deg(v)
    - Velikost sousedství stupně
    - $deg^+(v)$ – počet vstupních hran, $deg^-(v)$ – počet výstupních hran

Interreg
Rakousko-Česká republika
Evropský fond pro regionální rozvoj
Europäische Union
Evropská unie
Europäischer Fonds für regionale Entwicklung
Evropský fond pro regionální rozvoj
VŠTE
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES UPPER AUSTRIA

Teorie grafů

- Sled
  - Posloupnost vrcholů taková, že mezi každými dvěma po sobě jdoucími vrcholy je hrana
- Tah
  - Sled, ve kterém se neopakují hrany
- Cesta
  - Sled, ve kterém se neopakují vrcholy
- Cyklus (kružnice)
  - Uzavřená posloupnost vrcholů

Interreg
Rakousko-Česká republika
Evropský fond pro regionální rozvoj
Europäische Union
Evropská unie
Europäischer Fonds für regionale Entwicklung
Evropský fond pro regionální rozvoj
VŠTE
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES UPPER AUSTRIA

Teorie grafů

- Aplikace
  - Elektronické obvody
  - Přepravní sítě
  - Počítačové sítě
  - Databáze

Interreg
Rakousko-Česká republika
Evropský fond pro regionální rozvoj
Europäische Union
Evropská unie
Europäischer Fonds für regionale Entwicklung
Evropský fond pro regionální rozvoj
VŠTE
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES UPPER AUSTRIA

Graf – ADT

- Přístupové operace
  - **aVertex()**
  - **incidentEdges(v)**
  - **endVertices(e)**
  - **isDirected(e)**
  - **origin(e)**
  - **destination(e)**
  - **opposite(v,e)**
  - **areAdjecent(v,w)**
- Aktualizační operace
  - **insertVertex(o)**
  - **insertEdge(v, w, o)**
  - **insertDirectedEdge(v, w, o)**
  - **removeVertex(v)**
  - **removeEdge(e)**
- Obecné operace
  - **numVertices()**
  - **numEdges()**
  - **vertices()**
  - **edges()**

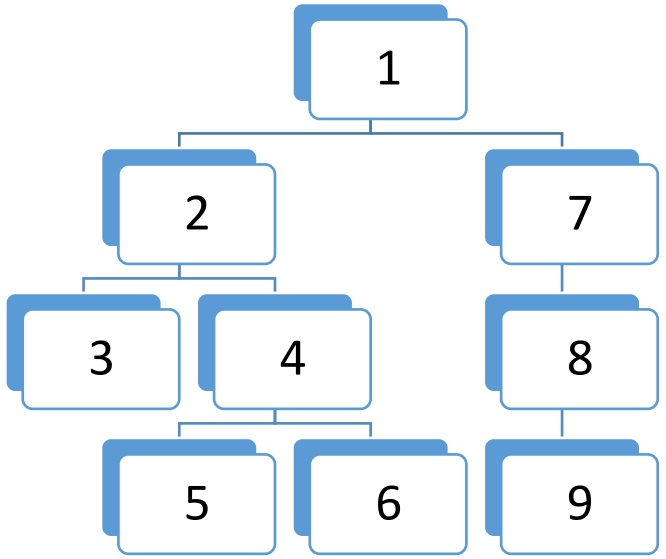
Interreg
Rakousko-Česká republika
Evropský fond pro regionální rozvoj
Europäische Union
Evropská unie
Europäischer Fonds für regionale Entwicklung
Evropský fond pro regionální rozvoj
VŠTE
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES UPPER AUSTRIA

Graf – DFS – depth-first search
Prohledávání do hloubky

- Algoritmus je úplný, ale není ideální
- Expanduje prvního následníka každého vrcholu, pokud jej ještě nenavštívil
- Pokud narazí na vrchol, z nějž už nelze dále pokračovat (nemá žádné následníky nebo byli všichni navštíveni), vrací se zpět backtrackingem.

```
void DFS (Graph G) {
  for (Node u in U(G))
    { stav[u] = FRESH;  p[u] = null; }
  i = 0;
  for (Node u in U(G))
    if (stav[u] == FRESH) DFS-Projdi(u); }
```

```
void DFS-Projdi(Node u) {
  stav[u] = OPEN; d[u] = ++i;
  for (Node v in Adj[u])
    if (stav[v] == FRESH)  {
      p[v] = u;  DFS-Projdi(v); }
  stav[u] = CLOSED; f[u] = ++i;}
```

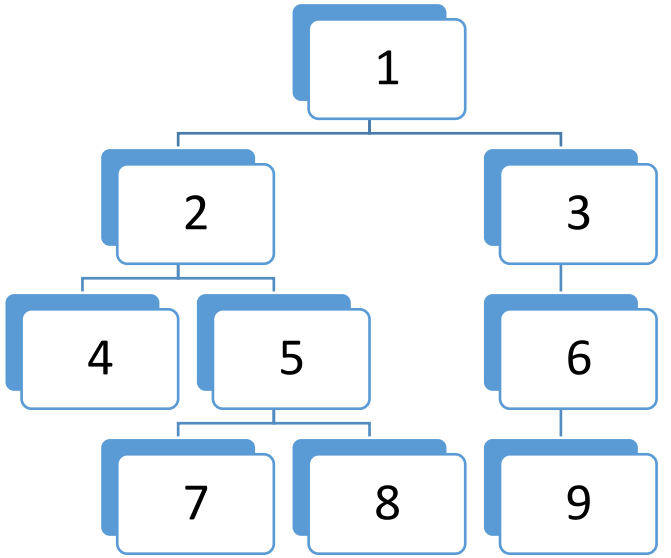


Interreg
Rakousko-Česká republika
Evropský fond pro regionální rozvoj
Europäische Union
Evropská unie
Europäischer Fonds für regionale Entwicklung
Evropský fond pro regionální rozvoj
VŠTE
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES UPPER AUSTRIA

Graf – BFS – Breadth-first search
Prohledávání do šířky

- projde všechny sousedy startovního vrcholu, poté sousedy sousedů atd. až projde celou komponentu souvislosti

```
void BFS (Graph G, Node s) {
 for (Node u in U(G)-s)
  { stav[u] = FRESH; d[u] = nekonečno; p[u] = null; }
 stav[s] = OPEN; d[s] = 0; p[s] = null;
 Queue.Init(); Queue.Push(s);
 while (!Queue.Empty()) {
  u = Queue.Pop();
  for (v in Adj[u]) {
   if (stav[v] == FRESH) {
    stav[v] = OPEN; d[v] = d[u]+1;
    p[v] = u; Queue.Push(v); }}
 stav[u]=CLOSED;}}
```



Interreg
Rakousko-Česká republika
Evropský fond pro regionální rozvoj
Europäische Union
Evropská unie
Europäischer Fonds für regionale Entwicklung
Evropský fond pro regionální rozvoj
VŠTE
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES UPPER AUSTRIA

Graf – hledání nejkratší cesty

- Dijkstrův algoritmus
  - Konečný, funguje pouze na kladně ohodnoceném grafu
  - $O(|V|^2+|E|)$ – V je počet vrcholů, E počet hran
- Bellmanův-Fordův algoritmus
  - Graf může obsahovat i záporné hrany
  - $O(V \cdot E)$ – pomalejší než Dijsktrův alg.
- Floydův-Warshallův algoritmus
  - Orientovaný graf s kladnými hranami
  - Nalezne nejkratší cestu mezi všemi vrcholy
  - Časová náročnost – $O(V^3)$, paměťová náročnost $O(V^2)$

Interreg Rakousko-Česká republika
Evropský fond pro regionální rozvoj
Europäische Union
Evropská unie
Europäischer Fonds für regionale Entwicklung
Evropský fond pro regionální rozvoj
VŠTE
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES UPPER AUSTRIA

Graf – hledání nejkratší cesty

- Johnsonův algoritmus
  - Orientovaný graf, může mít i záporné hrany
  - V řídkých grafech je rychlejší, než Floydův-Warshallův algoritmus
  - Dokáže rozpoznat záporný cyklus v grafu a výpočet ukončit
    - využívá Bellmanův-Fordův algoritmus, s jehož pomocí přehodnotí hrany tak, aby žádná neobsahovala zápornou hodnotu
    - Po přehodnocení hran používá Dijkstrův algoritmus k nalezení nejkratších cest mezi všemi uzly.
  - $O(V^2 \log_2(V) + VE)$

Interreg
Rakousko-Česká republika
Evropský fond pro regionální rozvoj
Europäische Union
Evropská unie
Europäischer Fonds für regionale Entwicklung
Evropský fond pro regionální rozvoj
VŠTE
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES UPPER AUSTRIA