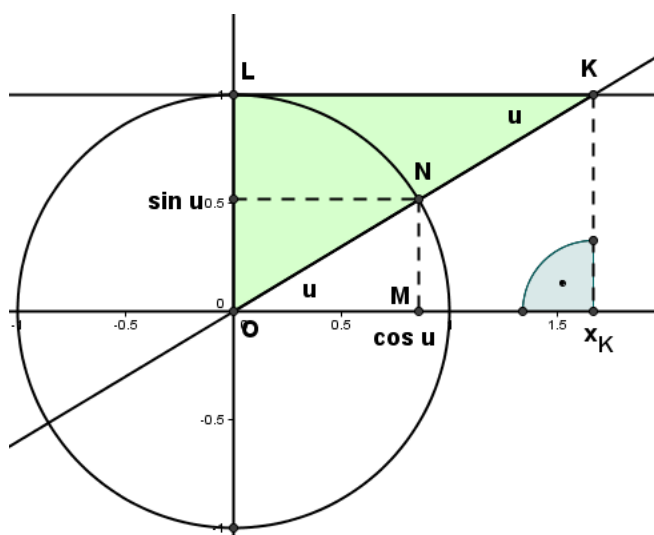


**Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí
prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým
zaměřením**

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

FUNKCE KOTANGENS

Definice funkce kotangens na jednotkové kružnici :



Funkce kotangens je daná ve tvaru : $y = \cot gx = \frac{\cos x}{\sin x}$

Důvod je dobře vidět na předchozím obr. z trojúhelníka OMN. Kotangens je totiž také poměr

přilehlé odvěsny ku protilehlé $\frac{|MO|}{|MN|} = \frac{\cos x}{\sin x}$. Hodnoty

funkce kotangens budeme znázorňovat na tečně k jednotkové kružnici v bodě L. Rameno úhlu u ($u \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$) protne tuto tečnu v bodě K. Funkcí



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01/0021“

kotangens je každému reálnému číslu u přiřazeno
číslo x_K .

POZNÁMKA:

*důvod zobrazování hodnot funkce kotangens na výše
zmíněnou tečnu je zřejmý. Funkce $\cotg x$ je poměr
přilehlé odvěsny ku protilehlé. Velikost protilehlé
odvěsny je 1, takže hodnota $\cotg x$ je přímo x_K . (Viz
trojúhelník OKL.)*

Definičním oborem funkce kotangens jsou všechna
reálná čísla kromě násobků π . Při těchto
hodnotách by totiž rameno úhlu u „naší tečnu“
neprotnulo.

Nyní odvodíme hodnoty funkce kotangens přiřazené
některým význačným číslům (a vlastně i úhlům) :

V intervalu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ půjde o čísla $\frac{1}{6}\pi$ (30°),

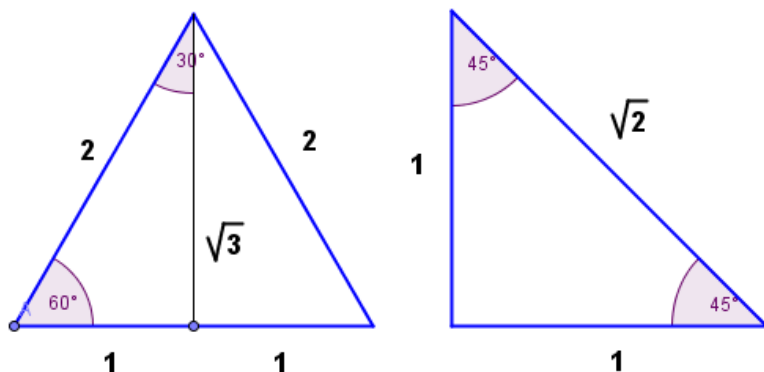
$\frac{1}{4}\pi$ (45°),

$\frac{1}{3}\pi$ (60°). K odvození nám opět pomůžou naše

známé trojúhelníky :

**Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí
prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým
zaměřením**

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“



Protože kotangens je poměr přilehlé odvěsny ku protilehlé v pravoúhlém trojúhelníku, snadno určíme :

$$\cot g \frac{1}{6}\pi = \sqrt{3} , \cot g \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{1} = 1 ,$$

$$\cot g \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

CVIČENÍ:

vypočtěte:

$$1) \cos \frac{\pi}{4} \cot g \frac{\pi}{6} \cot g \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} =$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

$$2) \frac{33 \cos \frac{\pi}{6} \cot g \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} =$$

VÝSLEDKY:

$$1) \frac{1}{2}, \quad 2) 11\sqrt{3}$$

Pro dynamickou demonstraci hodnot funkce kotangens na jednotkové kružnici otevřete přílohu 4 v aplikaci „geogebra“. Pro srovnání všech goniometrických funkcí v jednom dynamickém obrázku otevřete přílohu 5.

VLASTNOSTI FUNKCE KOTANGENS

Dříve jsme již uvedli, že definičním oborem funkce kotangens je množina \mathbb{R} kromě lichých násobků π . V příloze 4 můžeme při pohybu ramene zobrazeného úhlu vidět, že hodnoty funkce $\cot g$ se pohybují na vodorovné ose v rozmezí souřadnic



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí
prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým
zaměřením**

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

mínus nekonečno až plus nekonečno. Definiční obor
i obor funkčních hodnot lze tedy zapsat takto :

$D(f)$ je množina všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž

$$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}, H(f) = (-\infty; +\infty)$$

Z pozorování dynamické demonstrace v příloze 4
vyplývá věta :

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a pro všechna $k \in \mathbb{Z}$ platí :

$$\cotg(x + k\pi) = \cotg x$$

$$\text{Např. } \cot g \frac{\pi}{6} = \cot g \frac{7\pi}{6} = \cot g \frac{13\pi}{6} = \sqrt{3}$$

Této skutečnosti říkáme, že goniometrická funkce
kotangens je periodická s periodou π (180°).

Z přílohy 4 můžeme též zjistit, ve kterých intervalech
jsou hodnoty funkce \cotg kladné či záporné a také
určit její monotónnost. Ramenem točíme proti
směru hodinových ručiček, čili v kladném smyslu
rotace. Začneme od intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

interval	cotg x	monotónnost
$\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$	-	klesající
$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	+	klesající
$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	-	klesající
$\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$	+	klesající

Pozor: I když je funkce kotangens klesající na jednotlivých výše uvedených intervalech, není klesající na celém intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. Stačí si např.

všimnout, že libovolná funkční hodnota z intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ je menší než libovolná funkční hodnota

z intervalu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tento poznatek zobecníme :

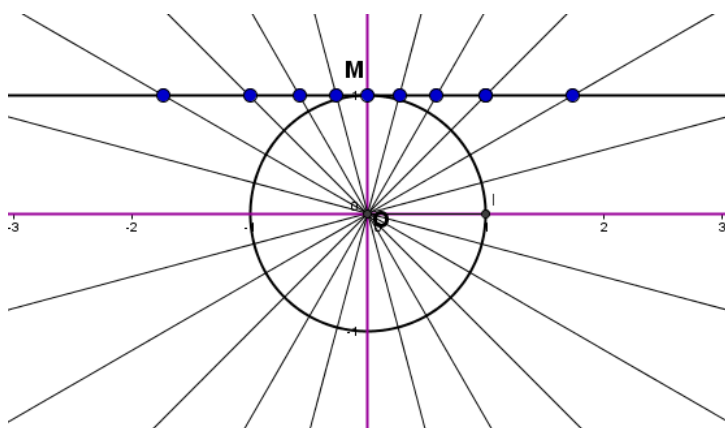
Funkce kotangens je klesající na jednotlivých intervalech $\left(k\pi; (k+1)\pi\right)$, ale není již klesající na celém svém definičním oboru.

**Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí
prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým
zaměřením**

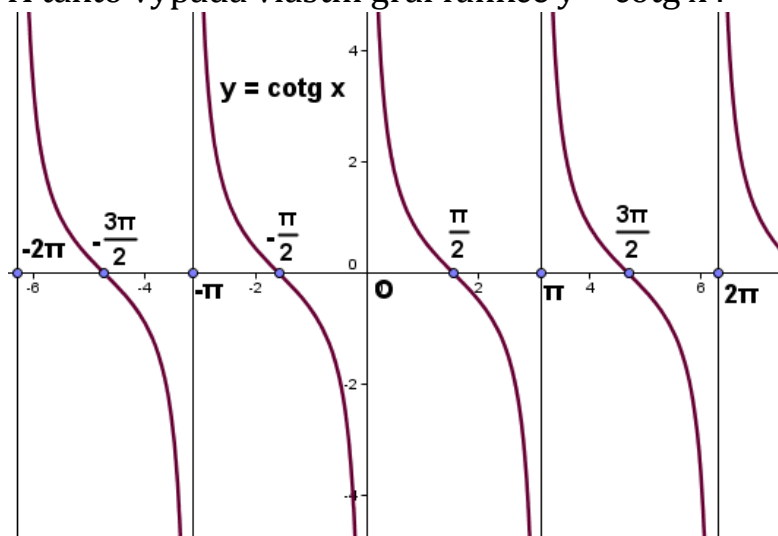
Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01/0021“

GRAF FUNKCE KOTANGENS

Následující obrázek nám pomůže při určování
některých bodů grafu:



A takto vypadá vlastní graf funkce $y = \cotg x$:





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí
prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým
zaměřením**

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

PŘÍKLADY:

Vypočtěte:

1) $\cot g \frac{41 \pi}{6} =$ 2) $\cot g \left(- \frac{8 \pi}{3} \right) =$

3) $\cot g \frac{51 \pi}{4} =$

ŘEŠENÍ:

1)

$$\cot g \frac{41 \pi}{6} = \cot g \left(\frac{5 \pi}{6} + 6 \pi \right) = \cot g \frac{5 \pi}{6} = - \cot g \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

2)

$$\cot g \left(- \frac{8 \pi}{3} \right) = \cot g \left(\frac{\pi}{3} - 3 \pi \right) = \cot g \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3) $\cot g \frac{51 \pi}{4} = \cot g \left(\frac{3 \pi}{4} + 12 \pi \right) = \cot g \frac{3 \pi}{4} = -1$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí
prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým
zaměřením**

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

CVIČENÍ:

Vypočtěte:

1) $\cot g \frac{31 \pi}{2} =$ 2) $\cot g \left(- \frac{33 \pi}{4} \right) =$

3) $\cot g (-1740^\circ) =$

VÝSLEDKY

1) 0 2) -1 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Použitá literatura :

[1] Odvárko, O., Řepová, J., 2008. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť – 3. část 5. vydání.* Praha. ISBN 978-80-7196-039-3



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí
prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým
zaměřením**

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“