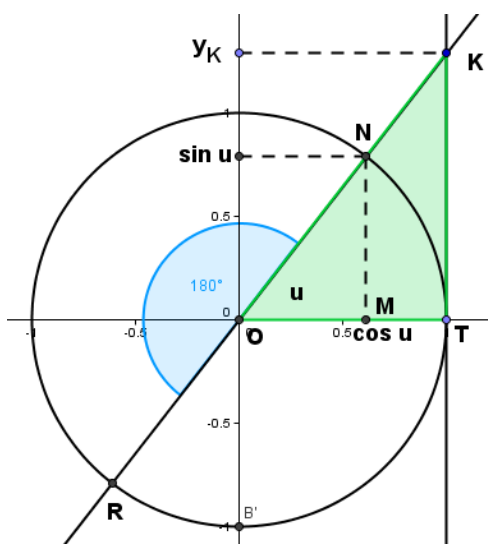


**Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí
prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým
zaměřením**

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01/0021“

FUNKCE TANGENS

Definice funkce tangens na jednotkové kružnici :



Funkce tangens je daná ve tvaru : $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Důvod je dobře vidět na předchozím obr. z trojúhelníka OMN. Tangens je totiž také poměr

protilehlé odvěsny ku přilehlé $\frac{|MN|}{|MO|} = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Hodnoty funkce tangens budeme znázorňovat na tečně k jednotkové kružnici v bodě T. Rameno úhlu u

$\left(u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$ protne tuto tečnu v bodě K.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01/0021“

Funkcí tangens je každému reálnému číslu u přiřazeno číslo y_K .

POZNÁMKA

Důvod zobrazování hodnot funkce tangens na výše zmíněnou tečnu je zřejmý. Funkce $tg x$ je poměr protilehlé odvěsny ku přilehlé. Velikost přilehlé odvěsny je 1, takže hodnota $tg x$ je přímo y_K .

Definičním oborem funkce tangens jsou všechna

reálná čísla kromě lichých násobků $\frac{\pi}{2}$. Při těchto hodnotách by totiž rameno úhlu u „naší tečnu“ neprotnulo.

Nyní odvodíme hodnoty funkce tangens přiřazené některým význačným číslům (a vlastně i úhlům) :

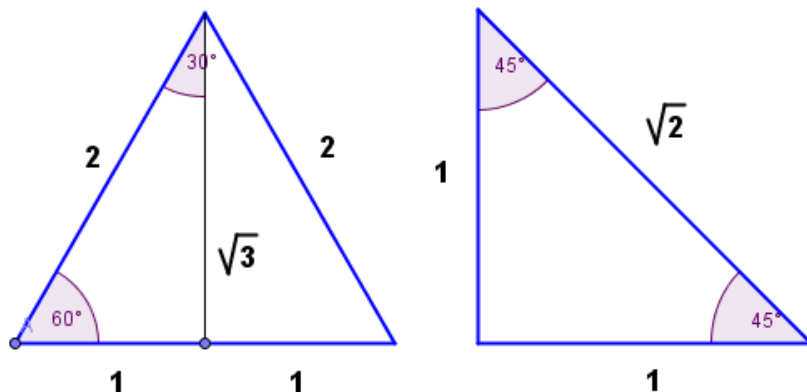
V intervalu $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ půjde o čísla $\frac{1}{6}\pi$ (30°), $\frac{1}{4}\pi$

(45°), $\frac{1}{3}\pi$ (60°). K odvození stačí opět načrtnout

šikovně dva trojúhelníky :

**Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí
prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým
zaměřením**

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01/0021“



Protože tangens je poměr protilehlé odvěsny ku
přilehlé v pravoúhlém trojúhelníku, snadno určíme :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

CVIČENÍ

Vypočtete:

$$1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} =$$

$$2) \frac{24 \cos \frac{\pi}{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{3}} =$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01/0021“

3) Pokud úhel 30° zvětšíme dvakrát, kolikrát se
zvětší hodnota funkce tangens ?

VÝSLEDKY

1) 1, 2) 8, 3) třikrát

Pro dynamickou demonstraci hodnot funkce tangens
na jednotkové kružnici otevřete přílohu 3 v aplikaci
„geogebra“

VLASTNOSTI FUNKCE TANGENS

Dříve jsme již uvedli, že definičním oborem funkce
tangens je množina \mathbb{R} kromě lichých násobků $\frac{\pi}{2}$.

V příloze 3 můžeme při pohybu ramene
zobrazeného úhlu vidět, že hodnoty funkce tg se
pohybují na ose y v rozmezí souřadnic mínus
nekonečno až plus nekonečno. Definiční obor i obor
funkčních hodnot lze tedy zapsat takto :

$D(f)$ je množina všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01/0021“

$$x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in Z, H(f) = (-\infty; +\infty)$$

Z pozorování dynamické demonstrace v příloze 3 vyplývá věta :

Pro všechna $x \in R$ a pro všechna $k \in Z$ platí :

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$$

$$\text{Např. } \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{9\pi}{4} = 1$$

Této skutečnosti říkáme, že goniometrická funkce tangens je periodická s periodou π (180°).

Z přílohy 3 můžeme též zjistit, ve kterých intervalech jsou hodnoty funkce tg kladné či záporné a také určit její monotónnost. Ramenem točíme proti směru hodinových ručiček, čili v kladném smyslu rotace.

Začneme od intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí
prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým
zaměřením**

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

interval	tg x	monotónnost
$\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$	-	rostoucí
$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	+	rostoucí
$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	-	rostoucí
$\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$	+	rostoucí

Pozor: I když je funkce tangens rostoucí na jednotlivých intervalech výše uvedených, není rostoucí na celém intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. Stačí si např.

všimnout, že libovolná funkční hodnota z intervalu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ je větší než libovolná funkční hodnota

z intervalu $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tento poznatek zobecníme :

Funkce tangens je rostoucí na jednotlivých

intervalech $\left[\left(2k - 1\right)\frac{\pi}{2}; \left(2k + 1\right)\frac{\pi}{2}\right)$, ale není již

rostoucí na celém svém definičním oboru.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

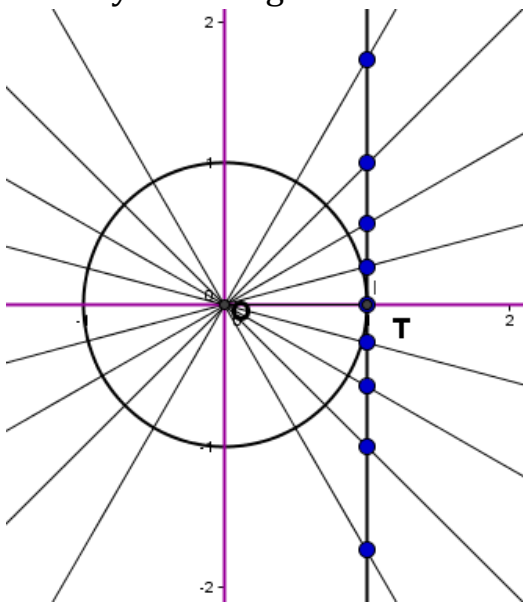
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

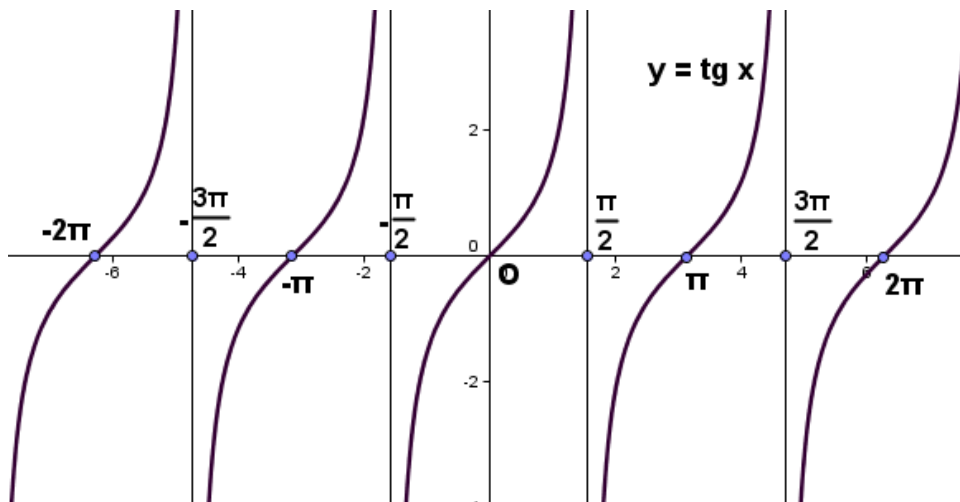
Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01/0021“

GRAF FUNKCE TANGENS

Následující obrázek nám pomůže při určování
některých bodů grafu:



A takto vypadá vlastní graf funkce $y = \text{tg } x$:





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí
prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým
zaměřením**

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01/0021“

PŘÍKLADY:

Vypočtěte:

$$1) \operatorname{tg} \frac{35 \pi}{6} = \quad 2) \operatorname{tg} \left(-\frac{8 \pi}{3} \right) =$$

$$3) \operatorname{tg} \frac{51 \pi}{4} =$$

ŘEŠENÍ:

$$1) \operatorname{tg} \frac{35 \pi}{6} = \operatorname{tg} \left(\frac{5 \pi}{6} + 5 \pi \right) = \operatorname{tg} \frac{5 \pi}{6} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$2) \operatorname{tg} \left(-\frac{8 \pi}{3} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - 3 \pi \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$3) \operatorname{tg} \frac{51 \pi}{4} = \operatorname{tg} \left(\frac{3 \pi}{4} + 12 \pi \right) = \operatorname{tg} \frac{3 \pi}{4} = -1$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí
prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým
zaměřením**

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

Použitá literatura :

[1] Odvárko, O., Řepová, J., 2008. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť – 3. část 5. vydání*. Praha. ISBN 978-80-7196-039-3