INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

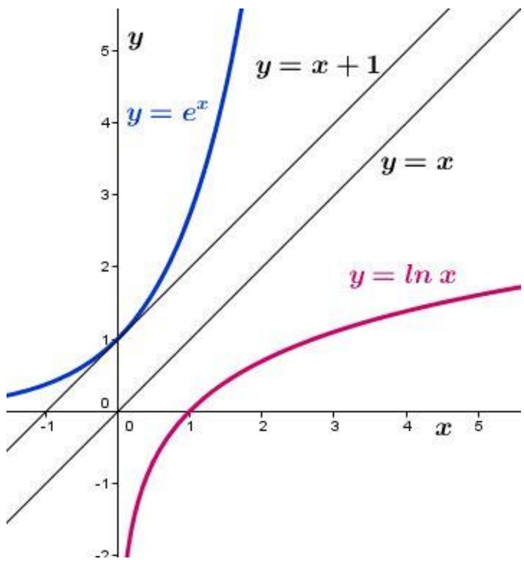
Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

LOGARITMICKÉ ROVNICE 3. ČÁST

PŘIROZENÉ A DEKADICKÉ LOGARITMY

Přirozený logaritmus je logaritmus o základu e. Číslo e je iracionální a nazývá se Eulerovo číslo. Jeho hodnota je přibližně 2,718. Toto číslo bylo zvoleno tak, aby graf lineární funkce y = x + 1 byl tečnou ke grafu exponenciální funkce $y = e^x$. Tato funkce má značný význam v teoretické matematice, ale setkáváme se sní i v biologii, chemii a ve fyzice. Například závislost barometrického tlaku na nadmořské výšce se vyjadřuje pomocí exponenciální funkce o základu e. Stejně významná je logaritmická funkce o základu e, tedy funkce $y = log_e x$, kterou značíme y = ln x. (viz obr.) Hovoříme o přirozeném logaritmu ln x.



Logaritmy o základu deset nazýváme **dekadické logaritmy**. Ty mají význam při některých numerických výpočtech. V zápisu $log_{10}\, x$ se obvykle základ 10 vynechává, píšeme tedy jen $\log x$.

Nyní se podíváme na vztah mezi přirozeným a dekadickým logaritmem. Musíme napřed ale uvést a dokázat následující větu:

Pro každé $x > 0$ a pro všechna kladná reálná čísla y, z různá od jedné platí: $log_y\, x = \frac{log_z\, x}{log_z\, y}$. (1)

Důkaz: Z definice logaritmu plyne:

$$y^{log_y x} = x$$

Vztah nyní zlogaritmujeme, použijeme logaritmus o základu z:

$$log_z\left(y^{log_y x}\right) = log_z\, x$$

Podle věty III. o logaritmech uvedené v kapitole „Logaritmické funkce 4. část“ můžeme provést další úpravu:

$$log_y\, x \,.\, log_z\, y = log_z\, x$$

A nakonec dostaneme:

$$log_y\, x = \frac{log_z\, x}{log_z\, y}$$

Pokud využijeme tuto větu, můžeme získat vztah mezi přirozeným a dekadickým logaritmem. Zvolíme-li y = e, z = 10, pak je

$$log_e\, x = \frac{log_{10}\, x}{log_{10}\, y}$$

neboli

$$\ln x = \frac{\log x}{\log e}$$

Zvolíme-li y = 10, z = e, pak je

$$log_{10}\, x = \frac{log_e\, x}{log_e\, 10}$$

neboli

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

PŘÍKLAD

Vypočtěte $log_3\, 7$, máte-li k dispozici následující údaje:

a) $\log 3 \doteq 0{,}477$, $\log 7 \doteq 0{,}845$

b) $\ln 3 \doteq 1{,}099$, $\ln 7 \doteq 1{,}946$

Řešení:

a) Podle věty uvedené výše platí:

$$log_3\, 7 = \frac{\log 7}{\log 3} \doteq \frac{0{,}845}{0{,}477} \doteq 1{,}771$$

b) Podobně jako v případě a):

$$log_3\, 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3} \doteq \frac{1{,}946}{1{,}099} \doteq 1{,}771$$

PŘÍKLAD

RTG paprsky s vlnovou délkou $10^{-8}\, m$ Procházejí hliníkovou vrstvou. Intenzita záření po průchodu vrstvou se spočítá podle vztahu $I = I_0 . e^{-\alpha x}$, kde I_0 je hodnota počáteční intenzity, I je intenzita po průchodu vrstvou o tloušťce x cm, α je číselná hodnota absorpčního koeficientu. Pro hliník je α přibližně 5,4.

a) Vypočtěte procentový úbytek I_0 po průchodu vrstvou 0,1 cm.

b) Určete tloušťku vrstvy, aby intenzita klesla na polovinu.

Řešení:

a) Zápis: x = 0,1 cm, $\alpha \doteq 5{,}4$, $\frac{I_0 - I}{I_0} \,.\, 100\ \% = ?$

Nejprve vyjádříme, kolik procent činí intenzita po průchodu vůči intenzitě počáteční:

$$I = I_0 . e^{-\alpha x}$$

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\alpha x}$$

$$\frac{I}{I_0} = e^{-5{,}4\,.0{,}1}$$

$$\frac{I}{I_0} \doteq 0{,}583$$

$$\frac{I}{I_0} \doteq 58{,}3\ \%$$

Úbytek:

$$\frac{I_0 - I}{I_0} \,.\, 100\ \% = 100\ \% - 58{,}3\ \% = \mathbf{41{,}7}\ \%$$

b) Zápis: $I = 0{,}5\, I_0$, $\alpha \doteq 5{,}4$, $x = ?$

Opět využijeme vztah $I = I_0 . e^{-\alpha x}$.

$$0{,}5\, I_0 = I_0 . e^{-\alpha x}$$

$$e^{-\alpha x} = 0{,}5$$

Rovnici zlogaritmujeme

$$\ln e^{-\alpha x} = \ln 0{,}5$$

$$-\alpha x = \ln 0{,}5$$

$$x = -\frac{\ln 0{,}5}{\alpha}$$

$$\boldsymbol{x \doteq 0{,}13\ cm}$$

CVIČENÍ

Vypočtěte:

a) $log_2 3$ b) $log_6 9$ c) $log_4 11$ d) $log_8 2$ (1)

Výsledky:

a) 1,5849 b) 1,2263 c) 1,7297 d) 0,3333 (1)

Použitá literatura :

[1] Odvárko, O., Řepová, J., 2008. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť – 3. část 5. vydání.* Praha. ISBN 978-80-7196-039-3