INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ČÁST

Exponenciální rovnicí nazveme takovou, ve které se vyskytují mocniny s neznámou v exponentu. Při řešení takových rovnic budeme často využívat následující věty (nazvěme ji třeba „Věta V“):

Věta V: Pro všechna reálná čísla x, y a pro každé reálné číslo **a** různé od 1 platí: Je-li $a^x = a^y$, pak je $x = y$. (1)

POZNÁMKA

Uvedená věta plyne ihned z toho, že exponenciální funkce $y = a^x$ je pro a > 1 rostoucí a pro **a** z intervalu (0, 1) klesající. Nemůže tedy nastat situace, aby nějaká hodnota exponenciální funkce byla přiřazena dvěma různým prvkům jejího definičního oboru. (1)

PŘÍKLAD

Řešte rovnici $5^{7-x} = 5^{3x-1}$ o neznámé $x \in R$

Řešení: Využijeme větu V: mají-li být o stejném základu sobě rovny, musí se sobě rovnat exponenty. Hledáme tedy všechna taková $x \in R$, pro která platí

$$7 - x = 3x - 1$$

Nyní stačí pouze vyřešit získanou lineární rovnici:

$$-4x = -8$$

$$x = 2$$

Provedem zkoušku dosazením do levé a pravé strany rovnice:

$$l(2) = 5^{7-2} = 3125$$

$$p(2) = 5^{3.2-1} = 3125$$

$l(2) = p(2)$ (Kořenem dané rovnice je č. 2)

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

PŘÍKLAD

Řešte rovnici $\frac{1}{3^{5-2x}} = 81$ o neznámé $x \in R$. (1)

Řešení: Obě strany rovnice upravíme tak, aby byly vyjádřeny ve tvaru mocnin o stejném základu:

$$3^{-(5-2x)} = 81$$

$$3^{-(5-2x)} = 3^4$$

Využijeme opět větu V a dostaneme:

$$-(5-2x) = 4$$

$$-5+2x = 4$$

$$2x = 9$$

$$x = 4{,}5$$

Zkouška:

$$l(4{,}5) = \frac{1}{3^{5-2.4{,}5}} = \frac{1}{3^{5-9}} = \frac{1}{3^{-4}} = 3^4 = 81$$

$$p(4{,}5) = 81$$

$$l(4{,}5) = p(4{,}5)$$

Číslo 4,5 je tedy skutečně řešením dané rovnice.

PŘÍKLAD

Závislost hmotnosti radioaktivní látky při její radioaktivní přeměně na čase udává vzorec $m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$. Veličina m udává hmotnost radioaktivní látky v čase t, veličina m_0 je počáteční hmotnost látky v čase 0 sekund. T je poločas přeměny (je to doba, za kterou se počáteční hmotnost m_0 látky zmenší na jednu polovinu).

Poločas přeměny rádia A je 183 sekund. Za kolik sekund od počátku přeměny klesne hmotnost na jednu šestnáctinu ?

Řešení: Do výše uvedeného vzorce dosadíme zadané údaje:

T = 183 s, $m = \frac{1}{16}\, m_0$ a získáme exponenciální rovnici

$$\frac{1}{16}\, m_0 = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{183}}$$

po vykrácení počáteční hmotností m_0 dostaneme rovnici

$$\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{183}}$$

o neznámé $t \in R^+$. Při jejím řešení postupujeme podobně jako v předchozích příkladech:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{183}}$$

$$4 = \frac{t}{183}$$

$$t = 732$$

Zkoušku provedeme dosazením do vzorce radioaktivní přeměny:

$$m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{732}{183}} = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\, m_0$$

Hmotnost rádia A se zmenší na jednu šestnáctinu za 732 sekund, což je přibližně 12 minut. (1)

Použitá literatura :

[1] Odvárko, O., Řepová, J., 2008. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť – 3. část 5. vydání.* Praha. ISBN 978-80-7196-039-3