INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

LOGARITMICKÁ FUNKCE 3. ČÁST

LOGARITMUS

PŘÍKLAD

Je dána logaritmická funkce g: $y = \log_2 x$. Určete hodnoty funkce g v těchto bodech:

a) 2 b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) 64 (1)

Řešení:

Připomeňme si ještě jednou definici logaritmické funkce. Na jejím základě úlohy vyřešíme.

Nechť f je exponenciální funkce $y = a^x$ o základu a (a je kladné reálné číslo různé od jedné). Logaritmická funkce o základu a je taková funkce g, pro kterou platí: pro všechna reálná čísla c, d je g(d) = c právě tehdy, když f(c) = d. (1)

Řešení a):

Máme určit $\log_2 2$ = „něco“. V definici je označeno g(d) = c. V tomto příkladu je tedy d = 2 a c = „něco“. Podíváme se, jak vypadá funkce f: zde platí, že f(c) = d, tedy f(„něco“) = 2. Víme, že funkce f je exponenciální funkce a nezapomínáme, že základ je 2. Zápis pomocí funkce f vypadá v našem příkladu takto: $2^{\text{"}něco\text{"}} = 2$. Na základě našich bohatých zkušeností s exponenciálními funkcemi a rovnicemi snadno zjistíme, že „něco“ = 1.

Závěr tedy je, že $\log_2 2 = 1$, protože $2^1 = 2$.

Řešení b):

Budeme postupovat stručněji než v a):

Máme určit $log_2 \frac{1}{8}$. Máme tedy vlastně určit číslo m takové, že když jím umocníme dvojku, dostaneme $\frac{1}{8}$.

$$2^m = \frac{1}{8}$$

$$2^m = \frac{1}{2^3}$$

$$2^m = 2^{-3}$$

$$m = -3$$

Závěr: $log_2 \frac{1}{8} = -3$

Řešení c):

Máme určit $log_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$. Máme tedy vlastně určit číslo m takové, že když jím umocníme dvojku, dostaneme $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$2^m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2^m = 2^{\frac{1}{2}} . 2^{-1}$$

$$2^m = 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$m = -\frac{1}{2} = -0,5$$

Závěr: $log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -0,5$

Řešení d):

Máme určit $log_2 64$. Máme tedy vlastně určit číslo m takové, že když jím umocníme dvojku, dostaneme 64 .

$$2^m = 64$$

$$2^m = 2^6$$

$$m = 6$$

Závěr: $log_2 64 = 6$

PŘÍKLAD

Určete hodnoty funkce f: $y = log_{\frac{1}{2}} x$ v bodech a) 2, b) $\frac{1}{32}$

Řešení a):

Máme řešit rovnici $y = log_{\frac{1}{2}} 2$, kterou přepíšeme jako rovnici exponenciální:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y = 2$$

$$2^{-y} = 2^1$$

$$-y = 1$$

$$y = -1$$

Řešení b):

Máme řešit rovnici $y = log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$, kterou přepíšeme jako rovnici exponenciální:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y = \frac{1}{32}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y = \frac{1}{2^5}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$y = 5$$

Na základě výše uvedených příkladů můžeme definovat logaritmus takto: **Logaritmus** čísla **s** o základu **a** je takové číslo **v**, pro něž platí: umocníme-li jím číslo **a**, dostaneme **s**. Přitom **a** je kladné reálné číslo různé od jedné, **s** je kladné reálné číslo. (1)

$$log_a\, s = v,\ právě\ když\ \ a^v = s \qquad (1)$$

Z uvedených skutečností ihned plynou tyto věty:

1) Pro každé a ∈ R⁺ \ {1} a pro každé s ∈ R⁺ platí:

$$s = \ a^{log_a s} \qquad (1)$$

2) Pro každé a ∈ R⁺ \ {1} platí:

$$a)\ \ log_a\, a = 1 \qquad\qquad b)\ \ log_a\, 1 = 0 \qquad (1)$$

PŘÍKLAD

Určete:

a) $log_3\, 81$, b) $log_{10}\, \frac{1}{1000}$

Řešení a):

$log_3\, 81 = v, právě\ když\ 3^v = 81;\ \ 3^v =\ 3^4,\ \ v = 4$

Řešení b):

$log_{10}\, \frac{1}{1000} = v, právě\ když\ 10^v = \frac{1}{1000};\ \ 10^v =\ 10^{-3},\ \ v = -3$

PŘÍKLAD

Vypočtěte všechna x ∈ R, pro která je $log_7\, x = 3$.

Řešení :

$log_7\, x = 3$, právě když (⇔) $7^3 = x$. Odtud x = 343

PŘÍKLAD

Vypočtěte všechna x ∈ R⁺ \ {1} , pro která je $log_x\ 32 = 5$.

Řešení :

Nezalekněte se toho, že již používáme x pro neznámou, i když označuje základ. Tato označení si můžeme volit libovolně, ale musíme mít neustále na paměti, které číslo je základ a které je logaritmem.

$log_x\ 32 = 5 \;\Leftrightarrow\; x^5 = 32;\; x^5 = 2^5,\; x = 5$

CVIČENÍ

Vypočtěte: a) $\log_3 x$ pro $x = 3, 9, 81, \sqrt{3}, \sqrt[3]{9}$

b) $\log_{10} x$ pro $x = 1,\ 10,\ 100\,000,\ \frac{1}{10\,000},\ 10^{-6}$

Výsledky: a) $1,\ 2,\ 4,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3}$

b) 0, 1, 5, -5, -6

CVIČENÍ

Vypočtěte: a) $4^{log_4 2}$ b) $100^{log_{100} 100}$ c) $0{,}3^{log_{0,3} 5}$

Výsledky: a) 2 b) 100 c) 5

CVIČENÍ

Určete všechna x ∈ (0, +∞), pro která platí:

a) $\log_6 x = -1$ b) $\log_6 x = 0$ c) $\log_6 x = 4$ d) $\log_6 x = -\frac{1}{3}$

Výsledky: a) $\frac{1}{6}$ b) 1 c) 1296 d) $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$

CVIČENÍ

Určete všechna $x \in R$, aby platilo:

a) $\log_x 25 = 2$ b) $\log_x 81 = 4$ c) $\log_x 8 = -3$ (1)

Výsledky: a) 5 b) 3 c) $\frac{1}{2}$

Použitá literatura :

[1] Odvárko, O., Řepová, J., 2008. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť – 3. část 5. vydání.* Praha. ISBN 978-80-7196-039-3