INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

LINEÁRNÍ ROVNICE S ABSOLUTNÍ HODNOTOU

LINEÁRNÍ ROVNICE S ABSOLUTNÍ HODNOTOU je lineární rovnice, ve které se vyskytuje jeden nebo více výrazů v absolutní hodnotě.

ABSOLUTNÍ HODNOTA $|x|$ reálného čísla x je definována takto: $|x| = x \quad \text{pro } x \in (0;\infty)$

$$|x| = 0 \quad \text{pro } x = 0$$

$$|x| = -x \quad \text{pro } x \in (-\infty;0)$$

zkráceně: $|x| = x \quad \text{pro } x \in \langle 0;\infty)$

$$|x| = -x \quad \text{pro } x \in (-\infty;0\rangle$$

ŘEŠENÍ lineární rovnice s absolutní hodnotou vede k řešení rovnic na daných intervalech.

Podle definice absolutní hodnoty určujeme nulové body výrazů v absolutní hodnotě. Tyto nulové body nám rozdělí množinu, na které rovnici s absolutní hodnotou řešíme, na intervaly tak, abychom mohli na jednotlivých intervalech počítat s výrazy bez absolutní hodnoty.

Na těchto intervalech postupně řešíme zadanou rovnici již bez absolutní hodnoty.

Sjednocení dílčích výsledků je řešením původní rovnice.

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021"

PŘÍKLAD 1

Řešte rovnici $|x+3|=1$ o neznámé $x \in R$.

ŘEŠENÍ:

Množinu reálných čísel rozdělíme na dva intervaly tak, abychom mohli na jednotlivých intervalech psát výraz $|x+3|$ bez absolutní hodnoty.

$|x+3| = x+3$ pro $x \in \langle -3;\infty)$

$(x+3 \geq 0$ pro $x \geq -3)$

$|x+3| = -(x+3) = -x-3$ pro $x \in (-\infty;-3\rangle$

$(x+3 \leq 0$ pro $x \leq -3)$

Rozhodující pro hodnotu výrazu s absolutní hodnotou je tzv. **nulový bod** výrazu, tedy bod (hodnota *x*), pro který je výraz uvnitř absolutní hodnoty roven nule. V našem případě z rovnice

$x+3=0$ plyne $x=-3$.

Nulový bod rozděluje množinu reálných čísel na dva intervaly (tvoří jejich krajní hodnotu), na kterých budeme řešit zadanou rovnici.

Pro lineární výraz v absolutní hodnotě je na celém intervalu tento výraz buď kladný, nebo záporný. (Ověříme dosazením libovolného čísla z intervalu do výrazu).

Předchozí můžeme zapsat přehledně do tabulky.

	$\left(-\infty;-3\right\rangle$	$\left\langle -3;\infty\right)$
$\lvert x+3\rvert =$	$-(x+3)=-x-3$	$x+3$

Nyní v původní rovnici $\lvert x+3\rvert=1$ nahradíme výraz v absolutní hodnotě výrazem bez absolutní hodnoty a vzniklé rovnice budeme řešit na daných intervalech. Celkem tak vyřešíme dvě rovnice. Rovnice řešíme pomocí ekvivalentních úprav.

pro $\underline{x\in\left(-\infty;-3\right\rangle}$

$-x-3=1 \qquad |+3$

$-x=4 \qquad |\cdot(-1)$

$\underline{x=-4}$

číslo $-4\in\left(-\infty;-3\right\rangle$

množina řešení $\underline{P_1=\{-4\}}$

pro $\underline{x\in\left\langle -3;\infty\right)}$

$x+3=1 \qquad |-3$

$\underline{x=-2}$

číslo $-2\in\left\langle -3;\infty\right)$

množina řešení $\underline{P_2=\{-2\}}$

Rovnice má DVĚ ŘEŠENÍ $\underline{x=-4}$ a $\underline{x=-2}$

Správnost výpočtu můžeme ověřit zkouškou.

Nyní určíme množinu řešení rovnice s absolutní hodnotou jako **sjednocení množin** P_1.a P_2. Rovnici řeší hodnota z množiny P_1 nebo z množiny P_2.

$P=P_1\cup P_2$

$P=\{-4\}\cup\{-2\}$

MNOŽINA ŘEŠENÍ: $\underline{P=\{-4;-2\}}$

PŘÍKLAD 2

Řešte rovnici $|x+1| = 2x-1$ o neznámé $x \in R$.

ŘEŠENÍ:

Určíme nulový bod výrazu v absolutní hodnotě.

$x+1=0 \qquad \underline{x=-1}$

Nulový bod rozdělí množinu reálných čísel na dva intervaly.

$R = (-\infty;-1\rangle \cup \langle -1;\infty)$.

Na jednotlivých intervalech ověříme dosazením libovolného čísla z intervalu hodnotu výrazu v absolutní hodnotě. Výraz v absolutní hodnotě napíšeme bez absolutní hodnoty. Vše zapíšeme do tabulky.

	$(-\infty;-1\rangle$	$\langle -1;\infty)$
$\|x+1\| =$	$-(x+1) = -x-1$	$x+1$

Nyní v původní rovnici $|x+1| = 2x-1$ nahradíme výraz v absolutní hodnotě výrazem bez absolutní hodnoty. Vzniklé dvě rovnice řešíme ekvivalentními úpravami na daných intervalech.

pro $\underline{x \in (-\infty;-1\rangle}$

$-x-1 = 2x-1 \quad |-2x+1$

$-3x = 0 \quad |:(-3)$

$\underline{x=0}$

číslo $0 \notin (-\infty;-1\rangle$

množina řešení $\underline{P_1 = \{\ \}}$

pro $\underline{x \in \langle -1;\infty)}$

$x+1 = 2x-1 \quad |-2x-1$

$-x = -2 \quad |\cdot(-1)$

$\underline{x=2}$

číslo $2 \in \langle -1;\infty)$

množina řešení $\underline{P_2 = \{2\}}$

Rovnice má JEDNO ŘEŠENÍ $\underline{x=2}$

Správnost výpočtu můžeme ověřit zkouškou dosazením do původní rovnice.

Nyní určíme množinu řešení rovnice s absolutní hodnotou jako sjednocení množin P_1.a P_2. Rovnici řeší hodnota z množiny P_1 nebo z množiny P_2.

$$P = P_1 \cup P_2$$

$$P = \{\ \} \cup \{2\}$$

$$\underline{P = \{2\}}$$

MNOŽINA ŘEŠENÍ: $\underline{P = \{2\}}$

PŘÍKLAD 3

Řešte rovnici $2|x+3|+|x-4|=10$ o neznámé $x \in R$.

ŘEŠENÍ:

Rovnice obsahuje dvě absolutní hodnoty, pro každou určíme nulový bod.

$$x+3=0 \qquad\qquad x-4=0$$

$$\underline{x=-3} \qquad\qquad \underline{x=4}$$

Dva nulové body rozdělí množinu reálných čísel na tři intervaly.

$$R = (-\infty;-3\rangle \cup \langle -3;4\rangle \cup \langle 4;\infty).$$

Na jednotlivých intervalech ověříme dosazením libovolného čísla z intervalu hodnotu výrazu v absolutní hodnotě. Výraz v absolutní hodnotě napíšeme bez absolutní hodnoty.

Vše zapíšeme do tabulky.

	$(-\infty;-3\rangle$	$\langle -3;4)$	$\langle 4;\infty)$
$\lvert x+3\rvert =$	$-(x+3)=-x-3$	$x+3$	$x+3$
$\lvert x-4\rvert =$	$-(x-4)=-x+4$	$-(x-4)=-x+4$	$x-4$

Nyní v původní rovnici $2\lvert x+3\rvert+\lvert x-4\rvert=10$ nahradíme výrazy v absolutní hodnotě výrazy bez absolutní hodnoty. Vzniklé tři rovnice řešíme ekvivalentními úpravami na daných intervalech.

pro $\underline{x\in(-\infty;-3\rangle}$

$$2(-x-3)+(-x+4)=10$$

$$-2x-6-x+4=10$$

$$-3x-2=10 \qquad |+2$$

$$-3x=12 \qquad |:(-3)$$

$$\underline{x=-4}$$

číslo $-4\in(-\infty;-3\rangle$

množina řešení $\underline{P_1=\{-4\}}$

pro $\underline{x\in\langle -3;4)}$

$$2(x+3)+(-x+4)=10$$

$$2x+6-x+4=10$$

$$x+10=10 \quad |-10$$

$$\underline{x=0}$$

číslo $0\in\langle -3;4)$

množina řešení $\underline{P_2=\{0\}}$

pro $\underline{x \in \langle 4;\infty)}$

$$2(x+3)+(x-4)=10$$

$$2x+6+x-4=10$$

$$3x+2=10 \qquad |-2$$

$$3x=8 \qquad |:3$$

$$\underline{x=\frac{8}{3}}$$

číslo $\frac{8}{3} \notin \langle 4;\infty)$

množina řešení $\underline{P_3=\{\ \}}$

Rovnice má DVĚ ŘEŠENÍ: $\underline{x=-4}$ a $\underline{x=0}$

Správnost výpočtu můžeme ověřit zkouškou dosazením do původní rovnice.

Nyní určíme množinu řešení rovnice s absolutní hodnotou jako sjednocení množin P_1, P_2 a P_3. Rovnici řeší hodnoty z množiny P_1, množiny P_2 nebo množiny P_3.

$$P=P_1 \cup P_2 \cup P_3$$

$$P=\{-4\} \cup \{0\} \cup \{\ \}$$

$$\underline{P=\{-4;0\}}$$

MNOŽINA ŘEŠENÍ: $\underline{P=\{-4;0\}}$