



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01/0021“

ROVNICE S NEZNÁMOU VE JMENOVATELI

ROVNICE S NEZNÁMOU VE JMENOVATELI je rovnice s jedním nebo více lomenými výrazy, ve kterých je neznámá ve jmenovateli (může být zároveň i v čitateli).

Řešení rovnice s neznámou ve jmenovateli vede k řešení rovnice na dané množině. Určíme podmínky, za kterých má rovnice smysl. Rovnici řešíme pomocí ekvivalentních úprav.

PŘÍKLAD 1

Řešte rovnici $\frac{x+6}{x-2} = 5$ o neznámé $x \in R$.

ŘEŠENÍ:

Aby měla rovnice smysl, musí mít smysl lomený výraz na levé straně rovnice a musí být $x \neq 2$.

Řešíme tedy rovnici pro $x \in R - \{2\}$.

Obě strany rovnice násobíme výrazem $x - 2$ (násobení nenulovým výrazem - ekvivalentní úprava). Dostaneme rovnici, která neobsahuje zlomky. Tu řešíme již známým postupem pomocí ekvivalentních úprav.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

$$\frac{x+6}{x-2} = 5 \quad | \cdot (x-2) \quad x \neq 2$$

$$\frac{x+6}{x-2} \cdot (x-2) = 5 \cdot (x-2)$$

$$x+6 = 5 \cdot (x-2)$$

$$x+6 = 5x-10 \quad | -5x-6$$

$$-4x = -16 \quad | :(-4)$$

$$\underline{x = 4}$$

Číslo $4 \in R - \{2\}$, je tedy řešením rovnice.

Správnost výpočtu je možné ověřit také zkouškou.

ZKOUŠKA:

$$L(4) = \frac{4+6}{4-2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$P(4) = 5$$

$$L(4) = P(4)$$

ŘEŠENÍ ROVNICE: $\underline{x = 4}$

MNOŽINA ŘEŠENÍ: $\underline{P = \{4\}}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01/0021“

PŘÍKLAD 2

Řešte rovnici $\frac{x+1}{x+3} = \frac{x+5}{x+9}$ o neznámé $x \in R$.

ŘEŠENÍ:

Aby měla rovnice smysl, musí mít smysl všechny lomené výrazy v rovnici a musí tedy být $x \neq -3 \wedge x \neq -9$.

Řešíme tedy rovnici pro $x \in R - \{-3; -9\}$.

Obě strany rovnice násobíme nejmenším společným násobkem výrazů $x+3$ a $x+9$, tj. nenulovým výrazem $(x+3)(x+9)$ (ekvivalentní úprava). Dostaneme rovnici, která neobsahuje zlomky. Pokračujeme v řešení pomocí ekvivalentních úprav.

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{x+5}{x+9} \quad | \cdot (x+3)(x+9)$$

$$\frac{x+1}{x+3} \cdot (x+3)(x+9) = \frac{x+5}{x+9} \cdot (x+3)(x+9)$$

$$(x+1)(x+9) = (x+5)(x+3)$$

$$x^2 + 9x + x + 9 = x^2 + 3x + 5x + 15$$

$$x^2 + 10x + 9 = x^2 + 8x + 15 \quad | -x^2 - 8x - 9$$

$$2x = 6 \quad | :2$$

$$\underline{x = 3}$$

Číslo $3 \in R - \{-3; -9\}$, je tedy řešením rovnice.

ŘEŠENÍ ROVNICE: $\underline{x = 3}$

MNOŽINA ŘEŠENÍ: $\underline{P = \{3\}}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01/0021“

PŘÍKLAD 3

Řešte rovnici $\frac{2x}{x-2} = \frac{4}{x-2}$ o neznámé $x \in R$.

Na jednoduché rovnici si ukážeme důležitost určení podmínky, za které má rovnice smysl.

Určením podmínky zajišťujeme, že všechny úpravy rovnice, které provádíme, jsou ekvivalentní. To znamená, že výraz nenásobíme výrazem, který nabývá nulovou hodnotu.

ŘEŠENÍ:

NEÚPLNÉ A TEDY CHYBNÉ ŘEŠENÍ:

Neřešíme podmínku a rovnou násobíme výrazem $x - 2$ v domnění, že se jedná o ekvivalentní úpravu.

$$\frac{2x}{x-2} = \frac{4}{x-2} \quad | \cdot (x-2)$$

$$\frac{2x}{x-2} \cdot (x-2) = \frac{4}{x-2} \cdot (x-2)$$

$$2x = 4 \quad | : 2$$

$$\underline{x = 2}$$

ŘEŠENÍ ROVNICE: $\underline{x = 2}$

POZOR – toto řešení rovnice není správné



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01/0021“

ÚPLNÉ A TEDY SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ:

Určíme podmínku tak, aby rovnice měla smysl: $x \neq 2$

Řešíme tedy rovnici pro $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

Nyní bezpečně násobíme obě strany rovnice výrazem $x - 2$, který je různý od nuly. Jedná se o ekvivalentní úpravu.

Dostaneme rovnici, která neobsahuje zlomky, kterou vyřešíme.

$$\frac{2x}{x-2} = \frac{4}{x-2} \quad | \cdot (x-2) \quad x \neq 2$$

$$\frac{2x}{x-2} \cdot (x-2) = \frac{4}{x-2} \cdot (x-2)$$

$$2x = 4 \quad | : 2$$

$$\underline{x = 2}$$

Číslo $2 \notin \mathbb{R} - \{2\}$ (číslo 2 je shodné s číslem 2 z podmínky), a tedy není řešením rovnice.

Správnost závěru potvrzuje také zkouška.

ZKOUŠKA:

$$L(2) = \frac{2 \cdot 2}{2-2} = \frac{4}{0} = \text{nemá smysl}$$

$$P(2) = \frac{4}{2-2} = \frac{4}{0} = \text{nemá smysl}$$

ZÁVĚR: rovnice $\frac{2x}{x-2} = \frac{4}{x-2}$ nemá řešení

MNOŽINA ŘEŠENÍ: $P = \{ \}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

PŘÍKLAD 4

Řešte rovnici $\frac{x-1}{x} = \frac{x+1}{x-1}$ o neznámé

a) $x \in R$,

b) $x \in Z$.

ŘEŠENÍ:

Aby měla rovnice smysl, musí být $x \neq 0 \wedge x \neq 1$

Řešíme tedy rovnici pro $x \in R - \{0;1\}$, resp. $x \in Z - \{0;1\}$.

Obě strany rovnice násobíme nenulovým výrazem $x(x-1)$ (ekvivalentní úprava). Dostaneme rovnici, která neobsahuje zlomky. Tu vyřešíme pomocí ekvivalentních úprav.

$$\frac{x-1}{x} = \frac{x+1}{x-1} \quad | \cdot x(x-1)$$

$$\frac{x-1}{x} \cdot x(x-1) = \frac{x+1}{x-1} \cdot x(x-1)$$

$$(x-1)^2 = (x+1)x$$

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 + x \quad | -x^2 - x - 1$$

$$-3x = -1 \quad | :(-3)$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{3}}}$$

Správnost výpočtu je možné ověřit také zkouškou.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01/0021“

ŘEŠENÍ ROVNICE závisí na množině, v níž rovnici řešíme:

a) neznámá $x \in R$: **MNOŽINA ŘEŠENÍ:** $P = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

rovnice má jedno řešení, protože $\frac{1}{3} \in R - \{0;1\}$

b) neznámá $x \in Z$: **MNOŽINA ŘEŠENÍ:** $P = \{ \}$

rovnice nemá řešení, protože $\frac{1}{3} \notin Z - \{0;1\}$

PŘÍKLAD 5:

Řešte rovnici $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} + \frac{4x}{x^2-1} = 0$ o neznámé $x \in R$.

ŘEŠENÍ:

Aby měla rovnice smysl, musí být $x \neq \pm 1$

Řešíme tedy rovnici pro $x \in R - \{\pm 1\}$.

Obě strany rovnice násobíme nejmenším společným násobkem výrazů $x+1$, $x-1$ a x^2-1 , tj. nenulovým výrazem $(x-1)(x+1)$ protože $x^2-1 = (x-1)(x+1)$.

Dostaneme rovnici, která neobsahuje zlomky. Tu vyřešíme pomocí ekvivalentních úprav.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} + \frac{4x}{x^2-1} = 0 \quad | \cdot (x-1)(x+1)$$

$$\left(\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} + \frac{4x}{x^2-1} \right) \cdot (x-1)(x+1) = 0 \cdot (x-1)(x+1)$$

$$\frac{x-1}{x+1} \cdot (x-1)(x+1) - \frac{x+1}{x-1} \cdot (x-1)(x+1) + \frac{4x}{x^2-1} \cdot (x-1)(x+1) = 0$$

$$(x-1)^2 - (x+1)^2 + 4x = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) - (x^2 + 2x + 1) + 4x = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 + 4x = 0$$

$$0 \cdot x = 0 \quad \text{výrok je pravdivý pro všechna } x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$\underline{0 = 0}$$

Rovnice má nekonečně mnoho řešení. Řešení rovnice závisí na množině, v níž rovnici řešíme.

MNOŽINA ŘEŠENÍ: $\underline{P = \mathbb{R} - \{\pm 1\}}$