



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

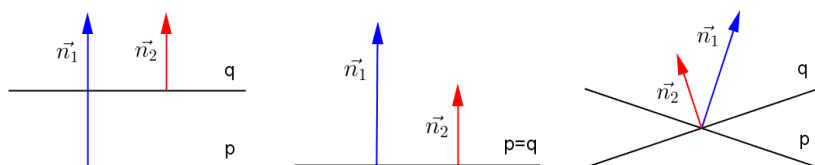
Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

### VZÁJEMNÁ POLOHA DVOU PŘÍMEK

#### VZÁJEMNÁ POLOHA DVOU PŘÍMEK

$$p: \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$q: \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$



**ROVNOBĚŽNÉ PŘÍMKY (RŮZNÉ)** nemají žádný společný bod, můžeme určit jejich vzdálenost, jejich odchylka je  $0^\circ$ .

Normálové (směrové) vektory rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné. Pro přímky  $p, q$  platí  $(a_1; b_1) = k \cdot (a_2; b_2)$

$$c_1 \neq k \cdot c_2$$

**ROVNOBĚŽNÉ PŘÍMKY (SHODNÉ)** mají všechny body společné, jejich vzdálenost je 0, jejich odchylka je  $0^\circ$ .

Normálové (směrové) vektory shodných rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné. Pro přímky  $p, q$  platí  $(a_1; b_1) = k \cdot (a_2; b_2)$

$$c_1 = k \cdot c_2$$

**RŮZNOBĚŽNÉ PŘÍMKY** mají jeden společný bod, nelze určit jejich vzdálenost, můžeme určit jejich odchylku.

Normálové (směrové) vektory různoběžných přímek nejsou rovnoběžné. Pro přímky  $p, q$  platí  $(a_1; b_1) \neq k \cdot (a_2; b_2)$



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01/0021“

### PŘÍKLAD 1

Určete vzájemnou polohu přímek  $p: 3x + 2y - 6 = 0$

$q: 6x + 4y - 12 = 0$

#### ŘEŠENÍ A:

Z obecných rovnic přímek určíme normálové vektory přímek  $p, q$ .

$$\vec{n}_1 = (3; 2) \quad \vec{n}_2 = (6; 4)$$

Zjistíme, zda jsou normálové vektory rovnoběžné, zda  $\vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2$ .

$$3 = k \cdot 6 \quad 2 = k \cdot 4$$

$$k = \frac{1}{2} \quad k = \frac{1}{2}$$

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{2} \cdot \vec{n}_2 \quad \text{přímky jsou rovnoběžné}$$

Ověříme, zda jsou přímky shodné nebo různé, zda  $c_1 = k \cdot c_2$ .

$$-6 = k \cdot (-12)$$

$$k = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \cdot c_2 \quad \text{přímky jsou rovnoběžné shodné}$$

**VZÁJEMNÁ POLOHA:** přímky jsou rovnoběžné shodné



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

### ŘEŠENÍ B:

Obecné rovnice přímků vynásobíme tak, aby koeficienty u  $x$  byly v obou rovnicích stejné. Pak určíme normálové vektory přímků  $p$ ,  $q$  a určíme vzájemnou polohu přímků.

$$p: 3x + 2y - 6 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$q: \underline{6x + 4y - 12 = 0}$$

$$p: 6x + 4y - 12 = 0$$

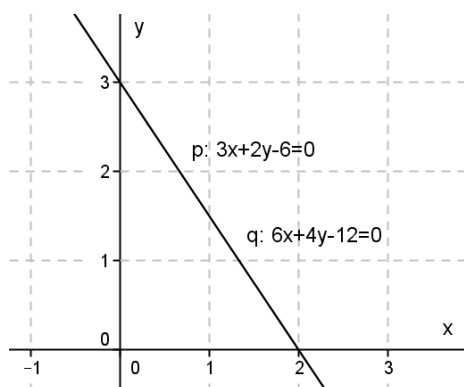
$$q: \underline{6x + 4y - 12 = 0}$$

$$\vec{n}_1 = (6; 4) \quad \vec{n}_2 = (6; 4)$$

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_2 \quad \text{přímky jsou rovnoběžné}$$

$$c_1 = c_2 \quad \text{přímky jsou rovnoběžné shodné}$$

**VZÁJEMNÁ POLOHA:** přímky jsou rovnoběžné shodné





evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

### PŘÍKLAD 2

Určete vzájemnou polohu přímek  $p: 2x - 7y + 12 = 0$

$q: x - 3,5y + 9 = 0$

#### ŘEŠENÍ A:

Z obecných rovnic přímek určíme normálové vektory přímek  $p, q$ .

$$** \vec{n}_1 = (2; -7) \quad \vec{n}_2 = (1; -3,5)$$

Zjistíme, zda jsou normálové vektory rovnoběžné, zda  $\vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2$ .

$$2 = k \cdot 1 \quad -7 = k \cdot (-3,5)$$

$$k = 2 \quad k = 2$$

$$\vec{n}_1 = 2 \cdot \vec{n}_2 \quad \text{přímky jsou rovnoběžné}$$

Ověříme, zda jsou přímky shodné nebo různé, zda  $c_1 = k \cdot c_2$ .

$$12 = k \cdot 9$$

$$k = \frac{4}{3}$$

$$c_1 \neq 2 \cdot c_2 \quad \text{přímky jsou rovnoběžné různé}$$

**VZÁJEMNÁ POLOHA:** přímky jsou rovnoběžné různé

**Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením**

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

**ŘEŠENÍ B:**

Obecné rovnice přímek vynásobíme tak, aby koeficienty u  $x$  byly v obou rovnicích stejné. Pak určíme normálové vektory přímek  $p, q$  a určíme vzájemnou polohu přímek.

$$p: 2x - 7y + 12 = 0$$

$$q: \underline{x - 3,5y + 9 = 0} \quad | \cdot 2$$

$$p: 2x - 7y + 12 = 0$$

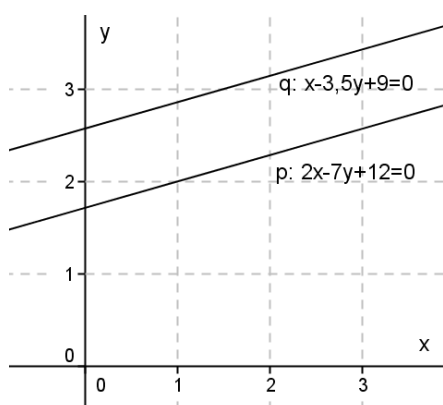
$$q: \underline{2x - 7y + 18 = 0}$$

$$\vec{n}_1 = (2; -7) \quad \vec{n}_2 = (2; -7)$$

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_2 \quad \text{přímky jsou rovnoběžné}$$

$$12 \neq 18 \quad c_1 \neq c_2 \quad \text{přímky jsou rovnoběžné různé}$$

**VZÁJEMNÁ POLOHA:** přímky jsou rovnoběžné různé





evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01/0021“

### PŘÍKLAD 3

Určete vzájemnou polohu přímek  $p: 3x - 4y + 2 = 0$

$q: 6x + 8y + 4 = 0$

#### ŘEŠENÍ A:

Z obecných rovnic přímek určíme normálové vektory přímek  $p, q$ .

$$\vec{n}_1 = (3; -4) \quad \vec{n}_2 = (6; 8)$$

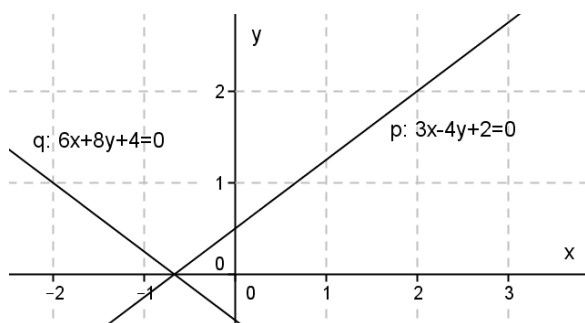
Zjistíme, zda jsou normálové vektory rovnoběžné, zda  $\vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2$ .

$$3 = k \cdot 6 \quad -4 = k \cdot 8$$

$$k = \frac{1}{2} \quad k = \frac{-1}{2}$$

$\vec{n}_1 \neq k \cdot \vec{n}_2$  přímky jsou různoběžné

**VZÁJEMNÁ POLOHA:** přímky jsou různoběžné





evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01/0021“

### ŘEŠENÍ B:

Obecné rovnice přímek vynásobíme tak, aby koeficienty u  $x$  byly v obou rovnicích stejné. Pak určíme normálové vektory přímek  $p$ ,  $q$  a určíme vzájemnou polohu přímek.

$$p: 3x - 4y + 2 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$q: \underline{6x + 8y + 4 = 0}$$

$$p: 6x - 8y + 4 = 0$$

$$q: \underline{6x + 8y + 4 = 0}$$

$$\vec{n}_1 = (6; -8) \quad \vec{n}_2 = (6; 8)$$

$$\vec{n}_1 \neq \vec{n}_2 \quad \text{přímky jsou různoběžné}$$

**VZÁJEMNÁ POLOHA:** přímky jsou různoběžné

### PRŮSEČÍK DVOU PŘÍMEK

**PRŮSEČÍK DVOU PŘÍMEK**  $p$ ,  $q$  je bod, který leží na přímce  $p$  a přímce  $q$  zároveň.

Průsečík dvou přímek  $p: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ,  $q: a_2x + b_2y + c_2 = 0$  určíme tak, že vyřešíme soustavu určenou obecnými rovnicemi přímek  $p$ ,  $q$ .

Podle počtu společných bodů dvou přímek (řešení soustavy) můžeme určit vzájemnou polohu přímek.



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01/0021“

### PŘÍKLAD 4

Určete průsečík přímek  $p: 4x - 6y - 12 = 0$

$q: -4x + 6y - 12 = 0$

### ŘEŠENÍ:

Průsečík určíme vyřešením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Použijeme sčítací metodu (soustavu můžeme řešit také dosazovací metodou).

$$4x - 6y - 12 = 0$$

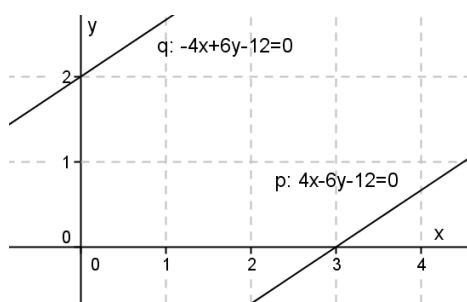
$$\underline{-4x + 6y - 12 = 0} \quad \text{sečteme}$$

$$\underline{-24 \neq 0}$$

Soustava nemá řešení, neexistuje společný bod přímek  $p, q$ .

Přímky jsou rovnoběžné různé.

**PRŮSEČÍK PŘÍMEK:** neexistuje společný bod







evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

### PŘÍKLAD 5

Určete průsečík přímek  $p: 4x - 6y - 12 = 0$   
 $q: -2x + 3y + 6 = 0$

#### ŘEŠENÍ:

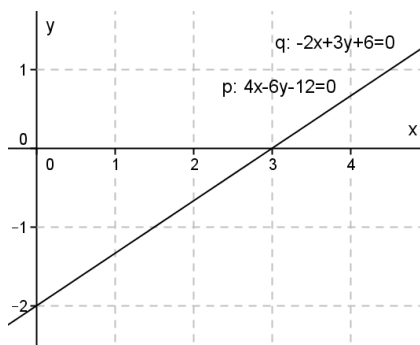
Průsečík určíme vyřešením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Použijeme sčítací metodu (soustavu můžeme řešit také dosazovací metodou).

$$\begin{array}{r} 4x - 6y - 12 = 0 \\ -2x + 3y + 6 = 0 \quad | \cdot 2 \\ \hline 4x - 6y - 12 = 0 \\ -4x + 6y + 12 = 0 \quad \text{sečteme} \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, všechny body přímek  $p$ ,  $q$  jsou společné.

Přímky jsou shodné.

**PRŮSEČÍK PŘÍMEK:** všechny body jsou společné





evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

### PŘÍKLAD 6

Určete průsečík přímek  $p: 2x - y - 3 = 0$

$q: 3x + y - 2 = 0$

### ŘEŠENÍ:

Průsečík určíme vyřešením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Použijeme sčítací metodu (soustavu můžeme řešit také dosazovací metodou).

$$2x - y - 3 = 0$$

$$\underline{3x + y - 2 = 0} \quad \text{sečteme}$$

$$5x - 5 = 0 \quad | +5$$

$$5x = 5 \quad | :5$$

$$\underline{x = 1}$$

Dosadíme  $3 \cdot 1 + y - 2 = 0$

$$3 + y - 2 = 0$$

$$y + 1 = 0 \quad | -1$$

$$\underline{y = -1}$$

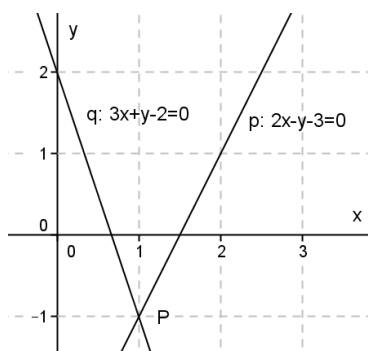
Soustava má jedno řešení, existuje jeden společný bod přímek  $p, q$ .

Průsečík má souřadnice  $P[1; -1]$ . Přímky jsou různoběžné.

**PRŮSEČÍK PŘÍMEK:  $P[1; -1]$**

## Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“



### PŘÍKLAD 7

Určete vzájemnou polohu přímek  $p, q$ :

$$p: x = 2 - 6t$$

$$q: x = 1 - 3s$$

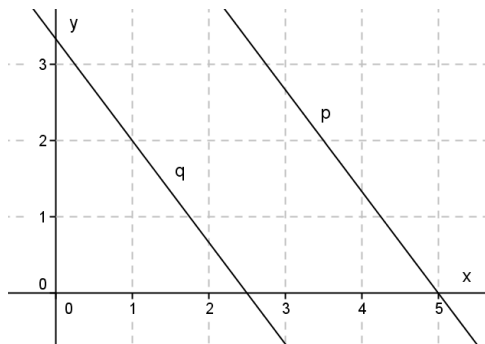
$$y = 4 + 8t$$

$$y = 2 + 4s$$

### ŘEŠENÍ A:

Parametrická vyjádření přímek převedeme na obecné rovnice a určíme vzájemnou polohu přímek již známým způsobem.

Podrobně si rozepíšeme druhý způsob řešení – řešení B.





evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

### ŘEŠENÍ B:

Z parametrických vyjádření přímek určíme směrové vektory přímek  $p$ ,  $q$ .

$$\vec{u}_1 = (-6; 8) \quad \vec{u}_2 = (-3; 4)$$

Zjistíme, zda jsou směrové vektory rovnoběžné, zda  $\vec{u}_1 = k \cdot \vec{u}_2$ .

$$-6 = k \cdot (-3) \quad 8 = k \cdot 4$$

$$k = 2 \quad k = 2$$

$$\vec{n}_1 = 2 \cdot \vec{u}_2 \quad \text{přímky jsou rovnoběžné}$$

Přímky jsou shodné, jestliže bod  $B[1;2]$  přímky  $q$  leží současně na přímce  $p$ . Dosadíme souřadnice bodu  $B[1;2]$  do parametrického vyjádření přímky  $p$  a z každé rovnice vypočítáme hodnotu parametru.

$$p: \quad x = 2 - 6t \quad 1 = 2 - 6t \quad 2 = 4 + 8t$$

$$\quad y = 4 + 8t \quad -1 = -6t \quad -2 = 8t$$

$$B[1;2] \quad t = \frac{1}{6} \quad t = \frac{-1}{4}$$

Hodnota parametru není stejná pro obě rovnice. Bod B neleží na přímce  $p$ .

Přímky jsou rovnoběžné různé.

**VZÁJEMNÁ POLOHA:** přímky jsou rovnoběžné různé



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01/0021“

### PŘÍKLAD 8

Napište rovnici přímky  $p$  procházející bodem  $A\left[-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$ , která je rovnoběžná s přímkou  $q: 2x - 3y + 7 = 0$ .

#### ŘEŠENÍ:

Normálové vektory rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné (mohou být i shodné). Určíme normálový vektor přímky  $q$ .

Normálový vektor přímky  $p$  je s ním shodný  $\vec{n}_p = \vec{n}_q$ .

$$\vec{n}_q = (2; -3) \quad \vec{n}_p = (2; -3)$$

Dosadíme do vzorce obecné rovnice  $ax + by + c = 0$ :

$$\vec{n}_p = (2; -3): \quad 2x - 3y + c = 0$$

$$A\left[-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]: \quad 2 \cdot \frac{-1}{2} - 3 \cdot \frac{2}{3} + c = 0$$

$$-1 - 2 + c = 0$$

$$-3 + c = 0$$

$$c = 3$$

Obecná rovnice:  $p: \underline{2x - 3y + 3 = 0}$

**OBEČNÁ ROVNICE PŘÍMKY:  $p: \underline{2x - 3y + 3 = 0}$**