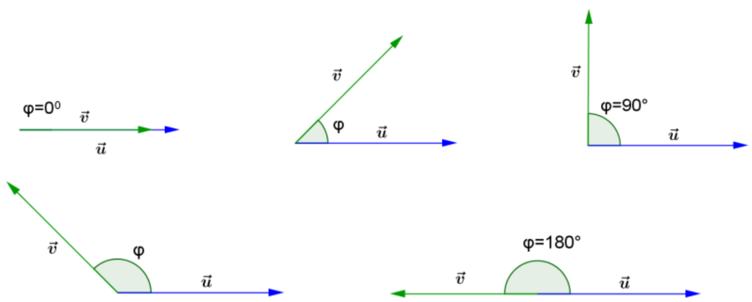
Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

ÚHEL DVOU VEKTORŮ, SKALÁRNÍ SOUČIN VEKTORŮ

ÚHEL DVOU VEKTORŮ

Dva nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ můžeme vždy umístit do společného počátečního bodu a určit velikost úhlu φ, který svírají. Pro jeho velikost platí $0° \leq \varphi \leq 180°$.



ÚHEL φ DVOU NENULOVÝCH VEKTORŮ $\vec{u} = (u_1; u_2)$, $\vec{v} = (v_1; v_2)$ vypočítáme podle vzorce

$$\cos\varphi = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Zkráceně $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|}$, kde $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$

$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ velikost vektoru $\vec{u}$

$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ velikost vektoru $\vec{v}$

Poznámka: Vzorec lze odvodit pomocí kosinové věty.

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

PŘÍKLAD 1

Určete úhel φ vektorů $\vec{u} = (-1;2)$, $\vec{v} = (1;3)$.

ŘEŠENÍ:

Vektory $\vec{u} = (-1;2)$, $\vec{v} = (1;3)$ jsou nenulové. Dosadíme do vzorce

$$\cos\varphi = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

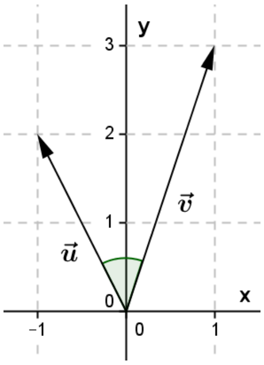
$$\cos\varphi = \frac{-1 \cdot 1 + 2 \cdot 3}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\underline{\varphi = 45^\circ}$$

ÚHEL VEKTORŮ: $\underline{\varphi = 45^\circ}$



PŘÍKLAD 2

Určete úhel φ vektorů $\vec{u} = (-1;2)$, $\vec{v} = (2;-4)$.

ŘEŠENÍ:

Vektory $\vec{u} = (-1;2)$, $\vec{v} = (2;-4)$ jsou nenulové. Dosadíme do vzorce

$$\cos\varphi = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} \cdot \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}}$$

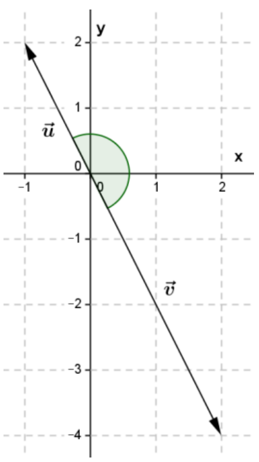
$$\cos\varphi = \frac{-1 \cdot 2 + 2 \cdot (-4)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-4)^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{-10}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}} = \frac{-10}{10} = -1$$

$$\cos\varphi = -1$$

$$\underline{\varphi = 180°}$$

ÚHEL VEKTORŮ: $\underline{\varphi = 180°}$



PŘÍKLAD 3

Určete úhel φ vektorů $\vec{u} = (-2;1)$, $\vec{v} = (1;2)$.

ŘEŠENÍ:

Vektory $\vec{u} = (-2;1)$, $\vec{v} = (1;2)$ jsou nenulové. Dosadíme do vzorce

$$\cos\varphi = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{-2 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}}$$

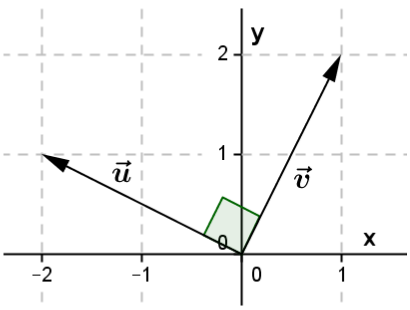
$$\cos\varphi = \frac{0}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = 0$$

$$\cos\varphi = 0$$

$$\underline{\varphi = 90^\circ}$$

Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou navzájem kolmé ($\vec{u} \perp \vec{v}$).

ÚHEL VEKTORŮ: $\underline{\varphi = 90^\circ}$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

PŘÍKLAD 4

Trojúhelník ABC určují vrcholy $A[1;2]$, $B[0;1]$, $C[2;1]$. Vypočítejte délky stran *AB*, *AC* a úhel α při vrcholu *A*.

ŘEŠENÍ:

Délky stran AB a AC vypočítáme podle vzorce pro vzdálenost dvou bodů $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

$A[1;2]$, $B[0;1]$

$$|AB| = \sqrt{(0-1)^2 + (1-2)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$$

$$\underline{|AB| = \sqrt{2}}$$

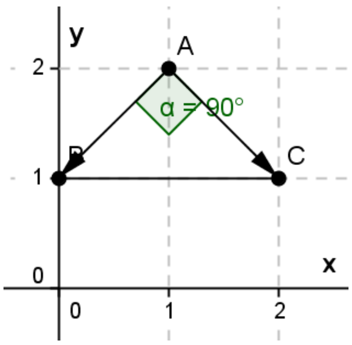
$A[1;2]$, $C[2;1]$

$$|AC| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2}$$

$$|AC| = \sqrt{1^2 + (-1)^2}$$

$$\underline{|AC| = \sqrt{2}}$$

Úhel α při vrcholu *A* určují vektory $\vec{AB}$ a $\vec{AC}$.



Určíme souřadnice vektorů $\vec{AB}$ a $\vec{AC}$.

$A[1;2],\ B[0;1]$ $\qquad$ $A[1;2],\ C[2;1]$

$\vec{AB} = B - A$ $\qquad$ $\vec{AC} = C - A$

$\vec{AB} = (0-1;1-2)$ $\qquad$ $\vec{AC} = (2-1;1-2)$

$\underline{\vec{AB} = (-1;-1)}$ $\qquad$ $\underline{\vec{AC} = (1;-1)}$

Velikost úhlu α vypočítáme jako velikost úhlu vektorů $\vec{AB}$ a $\vec{AC}$.

Dosadíme do vzorce: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{AC}\right|}$

$\vec{AB} = (-1;-1)$ $\qquad$ $\vec{AC} = (1;-1)$

$\left|\vec{AB}\right| = |AB| = \sqrt{2}$ $\qquad$ $\left|\vec{AC}\right| = |AC| = \sqrt{2}$

$$\cos\alpha = \frac{-1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 0$$

$$\cos\alpha = 0$$

$$\underline{\alpha = 90^\circ}$$

Trojúhelník ABC je pravoúhlý.

DÉLKY STRAN: $\underline{|AB| = \sqrt{2}}$, $\underline{|AC| = \sqrt{2}}$

ÚHEL PŘI VRCHOLU A: $\underline{\alpha = 90^\circ}$

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

SKALÁRNÍ SOUČIN VEKTORŮ

SKALÁRNÍ SOUČIN $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dvou nenulových vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ je reálné číslo

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\varphi$$

SKALÁRNÍ SOUČIN $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dvou nenulových vektorů $\vec{u}=(u_1;u_2)$, $\vec{v}=(v_1;v_2)$ vypočítáme podle vzorce

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2$$

Poznámka: Odvozeno ze vzorce pro výpočet úhlu dvou vektorů.

PŘÍKLAD 5

Určete skalární součin vektorů $\vec{u}\cdot\vec{v}$, je-li $\left|\vec{u}\right|=2$, $\left|\vec{v}\right|=1$ a svírají-li vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ úhel φ o velikosti 120°.

ŘEŠENÍ:

Dosadíme do vzorce: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\varphi$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\cdot 1\cdot\cos 120°$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\cdot 1\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$\underline{\vec{u}\cdot\vec{v} = -1}$$

SKALÁRNÍ SOUČIN: $\underline{\vec{u}\cdot\vec{v} = -1}$

PŘÍKLAD 6

Určete skalární součin vektorů $\vec{u} = (2;-3)$, $\vec{v} = (3;2)$.

ŘEŠENÍ:

Dosadíme do vzorce $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 2$

$\underline{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$

SKALÁRNÍ SOUČIN: $\underline{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$

PŘÍKLAD 7

Určete skalární součin vektorů $\vec{u} = (4;7)$, $\vec{v} = (3;-5)$.

ŘEŠENÍ:

Dosadíme do vzorce $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \cdot 3 + 7 \cdot (-5)$

$\underline{\vec{u} \cdot \vec{v} = -23}$

SKALÁRNÍ SOUČIN: $\underline{\vec{u} \cdot \vec{v} = -23}$

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

KOLMOST VEKTORŮ

Dva nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou navzájem kolmé ($\vec{u} \perp \vec{v}$) právě tehdy, když úhel vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je 90°.

Dosadíme $\varphi = 90°$ do vzorce pro skalární součin.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos 90° = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot 0 = 0$$

$$\underline{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

KOLMOST VEKTORŮ: Dva nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou navzájem kolmé ($\vec{u} \perp \vec{v}$) právě tehdy, když skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$ vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je roven nule ($\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$).

PŘÍKLAD 8

Ověřte, že vektory $\vec{u} = (2;-1)$ a $\vec{v} = (3;6)$ jsou navzájem kolmé.

ŘEŠENÍ:

Ověříme, že skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$ je roven nule ($\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$).

Dosadíme do vzorce $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 6$$

$$\underline{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

SKALÁRNÍ SOUČIN: $\underline{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$, VEKTORY JSOU KOLMÉ

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zvýšení matematických a odborných jazykových znalostí prostřednictvím ICT u žáků středních škol s technickým zaměřením

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.1.14/01.0021“

PŘÍKLAD 9

Určete souřadnici u_2 vektoru $\vec{u}$ tak, aby vektory $\vec{u} = (3; u_2)$ a $\vec{v} = (1; -3)$ byly navzájem kolmé.

ŘEŠENÍ:

Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou navzájem kolmé právě tehdy, když je skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$ roven nule ($\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$).

$$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 0$$

Dosadíme do rovnice souřadnice vektorů $\vec{u} = (3; u_2)$, $\vec{v} = (1; -3)$ a vypočítáme souřadnici u_2.

$$3 \cdot 1 + u_2 \cdot (-3) = 0$$

$$3 - 3u_2 = 0$$

$$-3u_2 = -3$$

$$\underline{u_2 = 1}$$

SOUŘADNICE: $\underline{u_2 = 1}$