Matematika

Studijní opora pro kombinované studium
Bakalářský studijní program
Revidovaná verze

Petr Chládek
Dana Smetanová

2017
České Budějovice

Vydala: Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích, Okružní 10, 370 01 České Budějovice

Za obsahovou a jazykovou správnost odpovídají autoři.

Cíl předmětu

Cílem předmětu je poskytnout studentům základní znalosti z lineární algebry, diferenciálního a integrálního počtu funkce jedné reálné proměnné potřebné při studiu specializovaných předmětů a dále podat výklad a objasnění stěžejních metod a algoritmů.

Výstupy z učení

Po absolvování kurzu student samostatně vyřeší základní úlohy z probírané látky (počítání s vektory, maticemi a determinanty, řešení soustav lineárních rovnic, vlastnosti a grafy elementárních funkcí, výpočet limity a derivace funkce, vyšetření průběhu funkce, výpočet primitivní funkce, neurčitého integrálu, metodou přímou, per-partes, substituční, výpočet určitého integrálu a obsahu rovinného obrazce).

Základní okruhy studia

1. Vektor, vektorový prostor;

2. Matice;

3. Determinanty;

4. Funkce jedné reálné proměnné;

5. Funkce inverzní, skládání funkcí;

6. Limita funkce;

7. Derivace;

8. L'Hospitalovo pravidlo;

9. Primitivní funkce, neurčitý integrál;

10. Per partes;

11. Substituce;

12. Určitý integrál;

13. Výpočet rovinného obsahu;

Studijní průvodce

- Klíčové pojmy

- Cíle kapitoly

- Čas potřebný ke studiu kapitoly

- Výklad

- Úkoly k zamyšlení a diskuzi

? - Klíč k řešení otázek

- Studijní materiály

Kapitola 1: VEKTORY

Klíčové pojmy:

vektor, operace s vektory

Cíle kapitoly:

- **pochopení pojmu vektor;**
- **znalost základních vektorových operací.**

Čas potřebný ke studiu kapitoly: 10 hodin

Výklad:

Definice: **Vektor** $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ - uspořádaná n-tice prvků.

Prvky $v_1, \ldots, v_n$ nazýváme složky vektoru.

Aritmetické operace s vektory:

Mějme vektory $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ a konstantu k

sčítání (odčítání) vektorů

$$\vec{v} \pm \vec{w} = (v_1 \pm w_1, \ldots, v_n \pm w_n)$$

násobení vektoru konstantou

$$k.\vec{v} = (k.v_1, \dots, k.v_n)$$

skalární součin

$$\vec{v}.\vec{w} = v_1.w_1 + v_2.w_2 + \cdots + v_n.w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i.w_i$$

norma vektoru

$$\parallel \vec{v} \parallel = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

odchylka vektorů

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}.\vec{w}}{\parallel \vec{v} \parallel . \parallel \vec{w} \parallel}$$

vektorový součin - pouze pro 3-složkové vektory $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_2.w_3 - v_3.w_2, -v_1.w_3 + v_3.w_1, v_1.w_2 - v_2.w_1)$$

vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ je kolmý na oba původní vektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$

jednotkový vektor

$$\parallel \vec{v} \parallel = 1$$

nulový vektor

$$\parallel \vec{v} \parallel = 0$$

rovnoběžné vektory

$$\vec{v} = k.\vec{w}$$

kolmé (ortogonální) vektory

$$\vec{v}.\vec{w} = 0$$

? Otázky a úkoly:

1. Spočítejme vektorový součin $(1, 2, 3) \times (4, 5, 6)$
2. Spočítejme skalární součin $(1, 2, 3).(4, 5, 6)$
3. Určete vzájemnou polohu vektorů
   (a) $(1, 2, 1, -1), (1, 1, -2, 1)$
   (b) $(1, 2, 1, -1), (3, 6, 3, -3)$

Klíč k řešení otázek:

1. $(1, 2, 3) \times (4, 5, 6) = (2.6 - 3.5, -1.6 + 4.3, 1.5 - 2.4) = (-3, 6, -3)$
2. $(1, 2, 3) \times (4, 5, 6) = 1.4 + 2.5 + 3.6 = 32$
3. (a) kolmé
   (b) rovnoběžné

Kapitola 2: VEKTOROVÉ PROSTORY

Klíčové pojmy:

vektorový prostor, lineární závislost a nezávislost, baze a dimenze

Cíle kapitoly:

- **pochopení pojmu vektorový prostor;**
- **porozumění souvislosti mezi bazí a dimenzí**

Čas potřebný ke studiu kapitoly: 10 hodin

Výklad:

Definice: **Vektorový prostor** V_k - množina všech k-složkových vektorů, na této množině jsou zavedeny operace sčítání vektorů a násobení vektoru konstantou.

- Pro vektory $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n} \in V_k$ a konstanty $c_1, \ldots, c_n$ nazýváme vektor

$$\vec{v} = c_1.\vec{v_1} + c_2.\vec{v_2} + \cdots + c_n.\vec{v_n} = \sum_{i=1}^{n} c_i.\vec{v_i}$$

  lineární kombinací vektorů $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ s koeficienty $c_1, \ldots, c_n$.

- Vektory $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n} \in V_k$ nazveme lineárně nezávislé, jestliže

  $$c_1.\vec{v_1} + c_2.\vec{v_2} + \cdots + c_n.\vec{v_n} = \vec{0} \Rightarrow c_1 = 0, \ldots, c_n = 0.$$

  V opačném případě jsou lineárně závislé.

- Množina vektorů $M = \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n} \in V_k\}$ generuje vektorový prostor V_k, jestliže každý vektor z vektorového prostoru V_k lze získat jako lineární kombinaci vektorů $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$

- Baze vektorového prostoru V_k - libovolná množina vektorů, která je lineárně nezávislá a současně generuje prostor V_k.

- Dimenze vektorového prostoru V_k, označujeme $\dim V_k$ - počet prvků baze.

  Pozn. Platí $\dim V_k = k$, tzn. každá baze prostoru V_k je tvořena přesně k vektory, které musí být lineárně nezávislé.

- Je-li $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ baze prostoru V_n, pak každý vektor $\vec{w} \in V_n$
  lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z baze, tj.

  $$\vec{w} = c_1.\vec{u_1} + \cdots + c_n.\vec{u_n}$$

  Koeficienty $c_1, \ldots, c_n$ se nazývají souřadnice vektoru $\vec{w}$ v bazi $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$

? Otázky a úkoly:

1. Jsou vektory $(1, 2), (2, 5)$ lineárně závislé nebo nezávislé?
2. Vytvořte lineární kombinaci $\vec{v}$ vektorů $\vec{v_1} = (1, 2), \vec{v_2} = (0, 1), \vec{v_3} = (3, 0)$ s koeficienty $c_1 = 4, c_2 = 1, c_3 = -1$

Klíč k řešení otázek:

1. Ověříme, zda je splněna podmínka lineární nezávislosti

$$c_1.(1,2) + c_2.(2.5) = (0,0) \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

   Tj. řešíme soustavu dvou rovnic

$$c_1 + 2c_2 = 0, 2c_1 + 5c_2 = 0 \ \Rightarrow$$

$$c_1 = 0, c_2 = 0 \ \Rightarrow \text{vektory jsou nezávislé}$$

2. $\vec{v} = (1,9)$

Kapitola 3: MATICE

Klíčové pojmy:

matice, Gaussova eliminace, determinant, inverzní matice, maticové rovnice

Cíle kapitoly:

- **pochopení pojmu matice;**
- **porozumění maticovým výpočtům;**
- **řešení soustav lineárních rovnic.**

Čas potřebný ke studiu kapitoly: 25 hodin

Výklad:

Definice: **Matice** A typu $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} prvky matice

i řádkový index

j sloupcový index

Čtvercová matice $A_{n\times n}$ - stejný počet řádků jako sloupců.

Diagonála matice $A_{n\times n}$ - tvořena všemi prvky $a_{ii}, i = 1, \ldots, n$

Jednotková matice E - na diagonále 1, všude jinde 0, tj.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Aritmetické operace s maticemi:

Mějme matice $A_{m\times n} = (a_{ij})$, $B_{m\times n} = (b_{ij})$ a konstantu k

sčítání (odčítání) matic

$$(A \pm B)_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

násobení matice konstantou

$$(k.A)_{m\times n} = \begin{pmatrix} k.a_{11} & \cdots & k.a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k.a_{m1} & \cdots & k.a_{mn} \end{pmatrix}$$

matice transponovaná

$$(A^T)_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

násobení matic
Je-li $A_{m\times p}$, $B_{p\times n}$, pak $A.B = C_{m\times n} = (c_{ij})$, přičemž

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \cdots + a_{ip}.b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj}$$

mocnina
pro čtvercové matice $A^2 = A.A$, $A^3 = A.A.A$, …

Zjišťování lineární nezávislosti pomocí matice:

- Hodnost matice A - počet jejích lineárně nezávislých řádků
- Algoritmus výpočtu- úprava na schodovitý tvar (každý následující řádek začíná větším počtem nul, než předchozí) pomocí Gaussovy eliminace postupným prováděním tzv. **ekvivalentních úprav**:
  - změnit pořadí řádků
  - vynásobit řádek nenulovou konstantou
  - přičíst k libovolnému řádku kterýkoli jiný řádek
- Závěr: Ekvivalentní úpravy nemění hodnost matice, přičemž hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Čtvercové matice

Determinant - hodnota $\det A$, kterou je možno přiřadit každé čtvercové matici $A_{n\times n}$ tím, že se sečte/odečte $n!$ výrazů vzniklých z jednotlivých prvků matice:

$n = 1$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$$
$$\det A = a_{11}$$

$n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

$n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Saarusovo pravidlo

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} \\ &- a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} \end{aligned}$$

Platí:

-
  - vyměníme-li v matici 2 řádky, v determinantu se změní znaménko
  - vynásobíme-li řádek matice konstantou c, změní se o tento násobek i hodnota determinantu
  - jestliže k řádku matice přičteme lineární kombinaci některých zbylých řádků, determinant se nezmění!!!
- determinant matice ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků na diagonále

Pro libovolný prvek a_{ij} matice $A_{n\times n}$ definujeme jeho algebraický doplněk $A_{ij} = (-1)^{i+j}.\mathrm{det}A^{\sharp}_{ij}$, kde $A^{\sharp}_{ij}$ je matice typu $(n-1)\times(n-1)$ vzniklá z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Platí:
Pro pevně zvolený i-tý řádek (či j-tý sloupec) je

$$\begin{aligned}\mathrm{det}A &= a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + \cdots + a_{in}.A_{in}\\ &= a_{1j}.A_{1j} + a_{2j}.A_{2j} + \cdots + a_{nj}.A_{nj}\end{aligned}$$

Matice $A_{n\times n}$ se nazve regulární pokud $\mathrm{h}(A) = n$, singulární pokud $\mathrm{h}(A) < n$

Pro matici A definujeme inverzní matici A^{-1}, která splňuje

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = E$$

Platí:

- je-li $\mathrm{det}A \neq 0$, pak A^{-1} existuje a matice A je regulární
- je-li $\mathrm{det}A = 0$, pak A^{-1} neexistuje a matice A je singulární

Výpočet inverzní matice:

- Pro matici A získáme matici adjungovanou adj$A$, když každý prvek matice A nahradíme jeho algebraickým doplňkem a transponujeme. Pro regulární matici A je

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{det}A}.\mathrm{adj}A$$

- Pro získání matice X splňující $A.X = E$ upravujeme ekvivalentními úpravami

$$(A \mid E) \sim \ldots \sim (E \mid \underline{X})$$

Řešení maticových rovnic

$$A.X = B \qquad /.A^{-1}$$

takto ano:

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$$
$$X = A^{-1}.B$$

takto ne:

$$A.X.A^{-1} = B.A^{-1}$$

Soustavy lineárních rovnic

soustava m lineárních rovnic o n neznámých:

$$\begin{gathered} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + a_{2n}.x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + a_{m3}.x_3 + a_{mn}.x_n = b_m \end{gathered}$$

matice soustavy:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

rozšířená matice soustavy:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

vektor pravé strany:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

vektor neznámých:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Maticový zápis soustavy

$$A_{m\times n}.\vec{x}_{n\times 1} = \vec{b}_{m\times 1}$$

Platí: Frobeniova věta - soustava lineárních rovnic má řešení právě tehdy když h(A) =h(A^*).

Podle Frobeniovy věty rozlišujeme následující možnosti:

- h(A) $\neq$h(A^*) $\Rightarrow$ soustava nemá řešení
- h(A) =h$(A^*) = n \Rightarrow 1$ řešení
- h(A) =h$(A^*) < n \Rightarrow \infty$ řešení

Metody řešení:

- Cramerovo pravidlo

  Z matice A vytvoříme pro $j = 1, \dots, n$ matici A_j tak, že v matici A

  nahradíme j-tý sloupec vektorem $\vec{b}$. Pak řešení

  $$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$$

- Inverzní matice

  Soustavu chápeme jako maticovou rovnici $A.\vec{x} = \vec{b}$, kterou známým způsobem vyřešíme

- Gaussova eliminace

  Pomocí ekvivalentních úprav rozšířené matice přejdeme ke schodovitému tvaru

  a z něj získáme výsledek

? Otázky a úkoly:

1. Spočítejme hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Spočítejme determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Spočítejte součin matic

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Najděte inverzi k matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Klíč k řešení otázek:

1. Ekvivalentními úpravami převedeme matici na schodovitý tvar, počet nenulových řádků ve schodovitém tvaru odpovídá hodnosti matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h(A) = 2$$

2. Podle Saarusova pravidla

$$\det(A) = 1.5.(-2) + 2.6.0 + 3.4.(-1) - 3.5.0 - 2.4.(-2) - 1.6.(-1) = 0$$

3. $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Kapitola 4: FUNKCE

Klíčové pojmy:

funkce, operace s funkcemi, graf

Cíle kapitoly:

- **pochopení pojmu funkce;**
- **schopnost určit definiční obory;**
- **konstrukce grafů elementárních funkcí.**

Čas potřebný ke studiu kapitoly: 25 hodin

Výklad:

Definice: **Funkce** $f\colon A \to B$ je předpis $y = f(x)$, který prvku x z množiny A přiřadí podle daného předpisu hodnotu y z množiny B tak, aby byla splněna podmínka

$$\forall x \in A \quad \exists!\, y \in B \text{ tak, že } y = f(x).$$

Prvek x nazveme vzorem prvku y, prvek y obrazem prvku x. Množinu A nazýváme definičním oborem funkce f a označujeme ji $D(f)$. Množinu B nazýváme oborem hodnot funkce f, označujeme $H(f)$.

Reálná funkce jedné reálné proměnné – taková funkce $y = f(x)$,

kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}$, $H(f) \subseteq \mathbb{R}$.

$x \dots$ nezávisle proměnná

$y \dots$ závisle proměnná

Analytické vyjádření funkce

- explicitní $y = f(x)$

- implicitní $F(x, y) = 0$

- parametrické $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$

Každá explicitní funkce se dá vyjádřit v implicitním tvaru ($y - f(x) = 0$), ale opačně nikoli, ne každou implicitní funkci lze vyjádřit explicitně.

Příklad

1)

$$\text{par. } f\colon x = 2t, y = 6t - 1 \quad \Longrightarrow$$
$$x = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2} \Rightarrow y = 6.\frac{x}{2} - 1 \quad \Longrightarrow$$
$$\text{ex. } f\colon y = 3x - 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{im. } 3x - y - 1 = 0$$

2)

$$\text{im. } 3x - y - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{ex. } f\colon y = 3x - 1$$
$$x = t \quad \text{par. } f\colon x = t, y = 3t - 1$$

Graf funkce $f = \{[x, f(x)] \colon x \in D(f)\}$

Základní operace s funkcemi:

Mějme funkce f, g definované na možině A, konstantu c

- sčítání $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- odčítání $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- násobení $(f.g)(x) = f(x).g(x)$
- dělení $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$
- násobení konstantou $(c.f)(x) = c.f(x)$

Elementární funkce:

- konstantní
$$y = k$$
- lineární
$$y = ax + b$$
- kvadratická
$$y = ax^2 + bx + c$$
- kubická
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
- nepřímá úměrnost
$$y = \frac{1}{x}$$
- lineární lomená
$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$
- racionální lomená
$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}$$
kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy nějakého (obecně různého) stupně

- druhá odmocnina

$$y = \sqrt{x}$$

- třetí odmocnina

$$y = \sqrt[3]{x}$$

- exponenciální

$$y = a^x \qquad a > 0, a \neq 1$$

- logaritmická

$$y = \log_a x \qquad a > 0, a \neq 1$$

- goniometrická

$$\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{cotg}$$

- cyklometrická

$$\arcsin, \arccos, \mathrm{arctg}, \mathrm{arccotg}$$

- absolutní hodnota

$$y = | \cdots |$$

Vlastnosti funkcí:

Máme-li funkci f definovanou na množině A, pak

- f rostoucí na množině A, pokud

$$\forall x_1, x_2 \in A\colon x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- f klesající na množině A, pokud

$$\forall x_1, x_2 \in A\colon x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

- f nerostoucí na množině A, pokud

$$\forall x_1, x_2 \in A\colon x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

- f neklesající na množině A, pokud

$$\forall x_1, x_2 \in A\colon x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- f omezená (ohraničená) na množině A, pokud

$$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}\colon \forall x \in A \quad c_1 < f(x) < c_2$$

- f sudá na množině A, pokud

$$\forall x \in A\colon f(x) = f(-x)$$

- f lichá na množině A, pokud

$$\forall x \in A\colon f(x) = -f(-x)$$

- f periodická na množině A, pokud

$$\exists p \in \mathbb{R}, p \neq 0\colon \forall x \in A \quad f(x) = f(x+p)$$

- f injektivní (prostá) na množině A, pokud

$$\forall x_1, x_2 \in A\colon x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Další operace s funkcemi:

Mějme funkce $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, pak

- **inverzní funkce** $f^{-1}\colon B \to A$ je taková, která splňuje podmínku

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

- **složená funkce** $g \circ f\colon A \to C$ je určena vztahem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Pozn. Aby bylo možno k funkci f definovat funkci inverzní f^{-1}, musí být funkce f injektivní!. Je-li f rostoucí, pak i f^{-1} je rostoucí. Je-li f klesající, pak i f^{-1} je klesající. Dále platí $D(f) = H(f^{-1})$, $H(f) = D(f^{-1})$.

? Otázky a úkoly:

1. Najděte definiční obor funkce
$$y = \frac{1}{5x - 15}$$

2. Pro funkce f, g vytvořte složenou funkci $h(x) = (f \circ g)(x)$

$$f(x) = \frac{x}{3-2x}, \; g(x) = 3x+1$$

3. Najděte definiční obor funkce $y = \sqrt{1-x^2}$

4. Zjistěte inverzní funkci k funkci $f\colon y = 5 + 4x$

Klíč k řešení otázek:

1. Jmenovatel zlomku nesmí být roven nule. Zjistíme pro která x jmenovatel je roven nule, a tato x je pak nutno z definičního oboru vyřadit.
   $5x - 15 = 0 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$

2. $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+1) = \dfrac{3x+1}{3-2.(3x+1)} = \dfrac{3x+1}{1-6x}$

3. $\langle -1, 1 \rangle$

4. $f^{-1}\colon y = \dfrac{x-5}{4}$

Kapitola 5: LIMITA A SPOJITOST FUNKCE

Klíčové pojmy:

limita funkce, neurčité výrazy, spojitost

Cíle kapitoly:

- **pochopení pojmu limita;**
- **znalost početních postupů pro výpočet limit;**
- **určování spojitosti.**

Čas potřebný ke studiu kapitoly: 10 hodin

Výklad:

Definice:

- **vlastní limita ve vlastním bodě**
  $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \text{ tak, že } \forall x \in \mathbb{R}$$
$$0 <\mid x - x_0 \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \varepsilon$$

- **nevlastní limita ve vlastním bodě**
  $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

$$\forall h \in \mathbb{R}\, \exists \delta > 0 \ \text{ tak, že } \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$0 <| x - x_0 |< \delta \Rightarrow f(x) > h$$

  $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$$\forall h \in \mathbb{R}\, \exists \delta > 0 \ \text{ tak, že } \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$0 <| x - x_0 |< \delta \Rightarrow f(x) < h$$

- **vlastní limita v nevlastním bodě**
  $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists k \in \mathbb{R} \ \text{ tak, že } \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$x > k \Rightarrow | f(x) - L |< \varepsilon$$

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists k \in \mathbb{R} \ \text{ tak, že } \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$x < k \Rightarrow | f(x) - L |< \varepsilon$$

- **nevlastní limita v nevlastním bodě**
  $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$$\forall h \in \mathbb{R}\, \exists k \in \mathbb{R} \ \text{ tak, že } \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$x > k \Rightarrow f(x) > h$$

  $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

$$\forall h \in \mathbb{R}\, \exists k \in \mathbb{R} \ \text{ tak, že } \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$x > k \Rightarrow f(x) < h$$

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

$$\forall h \in \mathbb{R}\, \exists k \in \mathbb{R} \ \text{ tak, že } \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$x < k \Rightarrow f(x) > h$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$\forall h \in \mathbb{R}\ \exists k \in \mathbb{R} \ \text{ tak, že } \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$x < k \Rightarrow f(x) < h$$

Pro bod z zavedeme ε-okolí bodu z jako množinu $\mathcal{O}_z = (z-\varepsilon, z+\varepsilon)$

Pro bod z zavedeme prstencové δ-okolí bodu z jako množinu $\mathcal{P}_z = (z-\delta, z) \cup (z, z+\delta)$

Alternativní definice vlastní limity ve vlastním bodě $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$

$$\forall x \in \mathcal{P}_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$
$$\text{je } \ f(x) \in \mathcal{O}_L = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

Pro počítání limit platí!!!

$$k + \infty = \infty,\ k - \infty = -\infty,\ \infty + \infty = \infty,$$
$$-\infty - \infty = -\infty,\ k.\infty = \pm\infty,\ \infty.\infty = \infty,$$
$$\frac{k}{\pm\infty} = 0,\ \frac{k}{0} = \pm\infty,\ \sqrt{\infty} = \infty$$

(pokud dané limity existují)

Dále máme tzv. neurčité výrazy, o jejichž hodnotě obecně nelze rozhodnout

$$\infty - \infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ \ldots$$

$$\text{speciální limita: } \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

Jednostranné limity

limita zprava $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 \;\text{ tak, že }\; \forall x \in \mathbb{R}$$
$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \varepsilon$$

limita zleva $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 \;\text{ tak, že }\; \forall x \in \mathbb{R}$$
$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \varepsilon$$

Platí:
$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$

Spojitost funkce

Funkce f je spojitá v bodě x_0, pokud

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Funkce f je spojitá zleva v bodě x_0, pokud

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Funkce f je spojitá zprava v bodě x_0, pokud

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Funkce f je spojitá na intervalu I, pokud je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I, spojitá zprava v jeho levém krajním bodě a spojitá zleva v jeho pravém krajním bodě (pokud tyto body do intervalu I patří).

? Otázky a úkoly:

1. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{2x^2+x-3}$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+6x}$$

4. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{2x^3+x-3}$$

Klíč k řešení otázek:

1. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{1}=4$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{2x^2+x-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1-\frac{4}{x^2})}{x^2(2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2})}=\frac{1-0}{2+0-0}=\frac{1}{2}$$

3. $\dfrac{1}{6}$

4. 0

Kapitola 6: DERIVACE

Klíčové pojmy:

derivace funkce, okamžitá rychlost, rovnice tečny a normály, L'Hospitalovo pravidlo, průběh funkce

Cíle kapitoly:

- **pochopení pojmu derivace;**
- **početní postupy pro výpočet derivací;**
- **schopnost uplatnit derivace v praktických úlohách.**

Čas potřebný ke studiu kapitoly: 25 hodin

Výklad:

Derivace funkce f v bodě x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Geometrický smysl derivace:

Derivace funkce f v bodě x_0 udává směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě x_0, tj.

$t\colon y = kx + q$, kde k = směrnice tečny=$f'(x_0)$ = tangens směrovéhlo úhlu tečny

Fyzikální smysl derivace:

Máme-li funkci $y = f(x)$, pak derivace $f'(x_0)$ určuje okamžitou rychlost změny veličiny y v bodě x_0. Je-li $f'(x_0) > 0$, hodnoty veličiny y v bodě x_0 rostou tím více, čím větší je $f'(x_0)$; je-li $f'(x_0) < 0$, hodnoty veličiny y v bodě x_0 klesají tím více, čím menší je $f'(x_0)$

Platí: Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, potom je v tomto bodě spojitá. Není-li funkce f v bodě x_0 spojitá, potom nemá derivaci v bodě x_0.

!Ale není pravda: spojitá $\Rightarrow$ má derivaci!

např. $f\colon y = \mid x \mid$, $x_0 = 0$.

Spojitá v bodě 0 je:

$$f(0) = \mid 0 \mid = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \mid x \mid = 0$$

Derivaci v bodě 0 nemá:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mid x \mid - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\mid x \mid}{x} = \text{neex},$$

neboť

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mid x \mid}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\mid x \mid}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Derivace funkce na intervalu: má-li funkce $y = f(x)$ derivaci v každém bodě otevřeného intervalu I, pak nová funkce $y' = f'(x)$ se nazývá derivace funkce f na intervalu I. Říkáme, že funkce f je na intervalu I diferencovatelná.

Derivace elementárních funkcí

$$1)\ y = c \qquad\qquad y' = 0$$

$$2)\ y = x^n \qquad\qquad y' = n.x^{n-1}$$

$$3)\ y = \sin x \qquad y' = \cos x$$

$$4)\ y = \cos x \qquad y' = -\sin x$$

$$5)\ y = \mathrm{tg} x \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$6)\ y = \mathrm{cotg} x \qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$7)\ y = \ln x \qquad y' = \frac{1}{x}$$

$$8)\ y = \mathrm{e}^x \qquad y' = \mathrm{e}^x$$

$$9)\ y = \log_a x \qquad y' = \frac{1}{x . \ln a}$$

$$10)\ y = a^x \qquad y' = a^x . \ln a$$

$$11)\ y = \arcsin x \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$12)\ y = \arccos x \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$13)\ y = \mathrm{arctg} x \qquad y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$14)\ y = \mathrm{arccotg} x \qquad y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Pravidla pro počítání derivací:

Mějme funkce f, g a konstantu $c \in \mathbb{R}$, pak

$$(c.f)'(x) = c.f'(x)$$

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

Druhá derivace funkce $y = f(x)$ na otevřeném intervalu I:

$$y''(x) = (f'(x))' = f''(x)$$

tj. druhá derivace=derivace první derivace.

Třetí derivace funkce $y = f(x)$ na otevřeném intervalu I:

$$y'''(x) = (f''(x))' = f'''(x)$$

tj. třetí derivace=derivace druhé derivace.

Aplikace diferenciálního počtu

1. Okamžitá rychlost - pro funkci $y = f(x)$ její derivace přímo udává okamžitou změnu hodnot veličiny y.

2. Tečna a normála - pro funkci $y = f(x)$ a bod $A = [x_0, y_0]$ derivace vyjadřuje směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě A, z toho lze ke grafu odvodit rovnici tečny a normály: tečna t má rovnici ve směrnicovém tvaru $t : y = kx + q$ o neznámých k, q. Směrnice $k = f'(x_0)$, absolutní člen q získáme s využitím faktu, že bod $[x_0, y_0]$ leží jak na grafu funkce f, tak na tečně t, tj. $y_0 = k.x_0 + q \Rightarrow y_0 = f'(x_0).x_0 + q \Rightarrow q = y_0 - f'(x_0).x_0$. Tedy rovnice tečny je
$$t : y = f'(x_0).(x - x_0) + y_0$$

   Normála n je přímka v bodě A kolmá na tečnu, tedy i její směrový vektor je kolmý na směrový vektor tečny, proto

$$n : y = -\frac{1}{f'(x_0)}.(x - x_0) + y_0$$

3. L'Hospitalovo pravidlo - výpočet limity z neurčitých výrazů $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \ldots$

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Mějme funkce f, g takové, že

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

nebo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Pokud

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

pak i

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$0.\infty$

$$\lim_{x \to x_0} f(x).g(x) = \begin{cases} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right] \\ \\ \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \end{cases}$$

$\infty - \infty$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] =$$

$$\left[\varphi(x) = \frac{1}{f(x)}, \psi(x) = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow\right.$$

$$\left. f(x) = \frac{1}{\varphi(x)}, g(x) = \frac{1}{\psi(x)}\right] =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\psi(x)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{\varphi(x).\psi(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

4. Průběh funkce - úloha ze zadaného funkčního předpisu vytvořit graf funkce, praktický výpočet lze rozdělit do několika dílčích kroků

   I. Definiční obor

   II. Intervaly, na nichž je funkce kladná či záporná

   III. Intervaly, na nichž je funkce rostoucí či klesající

   IV. Lokální extrémy (lokální minimum, lokální maximum)

   V. Intervaly na nichž je funkce konvexní či konkávní

   VI. Inflexní body

   VII. Asymptoty

Ad I.
OK

Ad II.
$f(x) > 0$, $f(x) < 0$

Ad III.
Je-li $f'(x) > 0$ na intervalu I, pak funkce f je na intervalu I rostoucí.
Je-li $f'(x) < 0$ na intervalu I, pak funkce f je na intervalu I klesající.

Ad IV.
Lokální extrémy mohou nastat pouze v bodech, kde derivace f neexistuje (ale samotná funkce f je definována) nebo v bodech, kde derivace je rovna nule (v tzv. stacionárních bodech). Platí: Je-li $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,$f^{(k)}(x_0) = 0$ pro $k = 2, \ldots, n-1$, kde x_0 je stacionární bod, pak

- je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ minimum v bodě x_0

- je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ maximum v bodě x_0

- je-li n liché a $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ funkce je v bodě x_0 rostoucí

- je-li n liché a $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ funkce je v bodě x_0 klesající

Ad V.

Funkce f je na intervalu I konvexní, jestliže $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$

$$x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Funkce f je na intervalu I konkávní, jestliže $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$

$$x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu I, pak funkce f je na intervalu I konvexní.
Je-li $f''(x) < 0$ na intervalu I, pak funkce f je na intervalu I konkávní.

Ad VI.

Inflexní bod funkce f je takový bod, ve kterém se funkce mění z konvexní na konkávní nebo naopak.

Inflexe může nastat pouze v bodech, kde druhá derivace f neexistuje (ale první derivace f existuje) nebo v bodech, kde druhá derivace je rovna nule. Platí:

Je-li $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0, f^{(k)}(x_0) = 0$ pro $k = 3, \ldots, n-1$, pak

- je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ konvexnost v bodě x_0

- je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ konkávnost v bodě x_0

- je-li n liché $\Rightarrow$ inflexe v bodě x_0

Ad VII.

Přímka $x = x_0$ je asymptota bez směrnice, jestliže některá z limit $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ je nevlastní. Nejčastěji taková asymptota nastává v izolovaných bodech vyloučených z definičního oboru.

Přímka $y = ax + b$ je asymptota se směrnicí, jestliže

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = b$$

Pozn.

V některých typech příkladů namísto lokálních extrémů zkoumáme extrémy absolutní, tj. extrémy na nějaké množině (nejčastěji na uzavřeném intervalu).

Platí (Weierstrassova věta): Funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu I má na tomto intervalu absolutní extrémy, které se mohou vyskytnout pouze ve stacionárních bodech funkce f (pokud stacionární body patří do intervalu I) nebo v krajních bodech intervalu I.

? Otázky a úkoly:

1. Zderivujte funkci $y = \sin^2(3x + 1)$
2. Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f\colon y = x^2 + 1$ v bodě $[x_0, y_0] = [1, ?]$
3. Zderivujte $y = \sin(2x + 4)$
4. Najděte stacionární body funkce $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x$

Klíč k řešení otázek:

1.
$$y' = 2\sin^1(3x + 1).[\sin(3x + 1)]' = 2\sin(3x + 1).\cos(3x + 1).[3x + 1]' =$$
$$2\sin(3x + 1).\cos(3x + 1).3 = 6\sin(3x + 1).\cos(3x + 1)$$

2. Nejprve dopočítáme bod y_0 jako funkční hodnotu v bodě x_0

   $y_0 = f(x_0) = x_0^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$

   Tečna bude mít rovnici $t\colon y = kx + q$, k zjistíme jako $f'(x_0)$

   $f'(x) = 2x \Rightarrow k = f'(1) = 2.1 = 2$

   q zjistíme dosazením bodu $[x_0, y_0]$ do rovnice tečny

   $2 = 2.1 + q \Rightarrow q = 0$

   Tedy tečna má rovnici $t\colon y = 2x$

3. $2\cos(2x + 4)$
4. $x = 1, x = 2$

Kapitola 7: INTEGRÁLY

Klíčové pojmy:

primitivní funkce, neurčitý integrál, určitý integrál, per partes, substituce

Cíle kapitoly:

- **pochopení pojmu integrál,**
- **znalost početních postupů pro výpočet integrálů,**
- **výpočet obsahu plochy pod křivkou.**

Čas potřebný ke studiu kapitoly: 25 hodin

Výklad:

Definice:

Funkce $F\colon I \to \mathbb{R}$ se nazývá **primitivní funkce** k funkci f na intervalu I, jestliže $\forall x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$. Je-li F primitivní funkce k funkci F a $c \in \mathbb{R}$, pak i $F + c$ je primitivní k funkci f. Množinu všech primitivních funkcí $\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ k funkci f označujeme symbolem $\int f(x)dx$ a nazýváme ji **neurčitý integrál**. Zapisujeme

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

konstantu c nazýváme integrační konstanta.

Příklad

Funkce $F(x) = \frac{x^3}{3}$ je primitivní k funkci $f(x) = x^2$, neboť $F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 = f(x)$. Stejně tak $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ je primitivní k funkci $f(x) = x^2$, neboť $F'(x) = \frac{3x^2}{3} + 0 = x^2 = f(x)$. Tedy

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

Integrály elementárních funkcí

$$1) \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{(platí pro } n \neq -1\text{!!!)}$$

$$2) \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$$

$$3) \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$4) \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$5) \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \mathrm{tg} x + c$$

$$6) \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\mathrm{cotg} x + c$$

$$7) \int \mathrm{e}^x \, dx = \mathrm{e}^x + c$$

$$8) \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$9) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c$$

$$10) \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arccos x + c$$

$$11) \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \mathrm{arctg} x + c$$

$$12) \int \frac{-1}{1+x^2} \, dx = \mathrm{arccotg} x + c$$

Pravidlo pro počítání integrálů:

Mějme funkce f, g a konstanty $a, b \in \mathbb{R}$, pak

$$\int a.f(x) \pm b.g(x)\ dx = a. \int f(x)\ dx\ \pm\ b. \int g(x)\ dx$$

Integrační metody

Per partes

$$\int u.v'\ dx = u.v - \int u'.v\ dx$$

Substituce

$$\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)\ dx =$$

$$\left| \varphi(x) = t \Rightarrow \varphi'(x)\ dx = t'\ dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{\varphi'(x)} \right|$$

$$= \int f(t)\ dt$$

Pozn. Typické použití substituce:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx =$$

$$\left| f(x) = t \Rightarrow f'(x)\ dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{f'(x)} \right|$$

$$= \int \frac{f'(x)}{t}\ \frac{dt}{f'(x)} = \ln|t| = \ln|f(x)| + c$$

Určitý integrál

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

určuje obsah plochy P mezi kladnou funkcí f a osou x na intervalu $\langle a, b\rangle$. Číslo a nazýváme dolní integrační mez, číslo b horní integrační mez.

Newton-Leibnitzova formule (způsob výpočtu určitého integrálu):

Je-li F primitivní funkce k funkci f na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Metoda per patres pro určitý integrál

$$\int_a^b u.v'\,dx = [u.v]_a^b - \int_a^b u'.v\,dx$$

Substituce pro určitý integrál

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x)).\varphi'(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt,$$

kde $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$.

Určitý integrál

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

je geometricky definován pro kladnou funkci f a pro $a < b$. Lze jej však příslušnými integračními metodami počítat bez těchto omezení, tedy i pro 'nekladnou' funkci f, i pro $a \geq b$.

Platí

$$\int_a^a f(x)\,dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = [F(x)]_b^a = F(a) - F(b) =$$

$$-(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Dále platí

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Aplikace integrálního počtu

Obsah plochy

- mezi kladnou funkcí f a osou x

$$P = \int_a^b f(x)\,dx$$

- mezi dvěma funkcemi f a g

$$P = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

- mezi osou x a zápornou funkcí f

$$P = -\int_a^b f(x)\,dx$$

? Otázky a úkoly:

1.

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

2. Zjistěte obsah plochy mezi osou x, osou y a přímkou $y = 1 - 2x$

3.

$$\int 5x^4 - 2x^3\,dx$$

4.

$$\int \frac{1}{2x+3}\,dx$$

Klíč k řešení otázek:

1.

$$\left| \ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt \Rightarrow dx = xdt \right| =$$

$$\int \frac{t}{x}.x\ dt = \int t\ dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

2.

$$P = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 - 2x\ dx = \left[x - x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

3.

$$x^5 - \frac{x^4}{2} + c$$

4.

$$\frac{1}{2}\ln|2x+3| + c$$

Povinná literatura

MOUČKA, J., RÁDL, P. *Matematika pro studenty ekonomie.* 2., uprav. a dopl. vyd. Praha: Grada Publishing, 2015. Expert (Grada). ISBN 978-80-247-5406-2.

Doporučená literatura

CHARVÁT, J. *Matematika 1 - Sbírka příkladů.* Praha: ČVUT, 2005. ISBN 80-01-03323-6.

KAŇKA, M., J. COUFAL. a J. KLŮFA. *Učebnice matematiky pro ekonomy.* Praha: Ekopress, 2007. ISBN 978-80-86929-24-8.

KLŮFA, J. a J. COUFAL. *Matematika 1.* Praha: Ekopress, 2003. ISBN 80-86119-76-9.