Vysoká škola technická a ekonomická

v Českých Budějovicích

Systémová analýza a modelování - řešené projektové příklady a praktická cvičení

Ing. Jiří Čejka, Ph.D.

2022

České Budějovice

Recenzenti:

Prof. Ing. Václav Cempírek, Ph.D.

Ing. Vladimír Faltus, Ph.D.

Vydala: Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích, Okružní 10, 370 01 České Budějovice

Za obsahovou a jazykovou správnost odpovídají autoři a vedoucí příslušných kateder.

ISBN:

Tisk:

Tribun EU s.r.o.

Cejl 892/32, Brno 602 00

knihovnicka.cz

Obsah

Úvodní slovo

Tato skripta vznikla jako cvičebnice k předmětu Systémová analýza a modelování. Jsou určena studentům navazujícího studia Logistiky. Stejně tak je vhodné tyto skripta s příklady využít u všech předmětů na vysokých školách, které se zabývají problematikou rozhodování zejména u modelů: Teorie her, Metoda DEA, Teorie hromadné obsluhy.

Poděkování

Doc. RNDr. Evě Vaněčkové, CSc, děkuji za diskuzi a odbornou pomoc při výběru vhodných příkladů.

Tato skripta byla vytištěna s podporou interního projektu Vysoké školy technické a ekonomické v Českých Budějovicích „ “.

1. Teorie her

Ukázkový příklad

Mějme matici:

$$\begin{array}{cc} & \textbf{B} \\ \text{A} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Existuje řešení v ryzí strategii (sedlový bod)?

Řešení:

Tuto úlohu můžeme řešit několika způsoby.

- Hráč A má strategii v každém řádku, hráč B v každém sloupci. Nezapomeňme, že matici sestavujeme vždy z pohledu hráče A. U hráče A v každém řádku nalezneme nejnižší hodnotu a z nejnižších hodnot tu nejvyšší. U hráče B nalezneme v každém sloupci nejvyšší hodnotu a z nejvyšších hodnot tu nejnižší. Tedy hráč A: minmax a hráč B: maxmin. Pokud matici sestavíme s opačnými znaménky, získáme matici z pohledu hráče B.

$$\begin{array}{cc} & \text{B} \\ \text{A} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \text{B} \\ \text{A} & \begin{pmatrix} -2 & -3 & -5 \\ -2 & -1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Z POHLEDU HRÁČE A Z POHLEDU HRÁČE B

Hráč A: 1. strategie = 1. řádek → min 2

2. strategie = 2. řádek → min 1

3. strategie = 3. řádek → min 0

max 2

Hráč B: 1. strategie = 1. sloupec → max 2

2. strategie = 2. sloupec → max 3

3. strategie = 3. sloupec → max 6

min 2

2 = 2
EXISTUJE SEDLOVÝ BOD A TEDY ŘEŠENÍ V RYZÍ STRATEGII

- Dalším způsobem řešení hry je postupné vyškrtávání dominovaných („horších“) strategií jednotlivých hráčů. Pokud hráč A porovnává své strategie (řádky), zjistí, že 3. strategie je dominovaná vůči první a druhé strategii, a tudíž ji vyškrtne. U hráče B hledáme buď dominující strategii (matice z pohledu hráče A) nebo dominovanou strategii (matice z pohledu hráče B).

Hráč B tedy vyškrtne 3. strategii. Hráč A opět srovnává své strategie a následně vyškrtne druhou strategii. Hráč B vyškrtne druhou strategii. Výsledkem hry (cenou hry) je opět číslo 2.

$$\begin{array}{cc} & \text{B} \\ \text{A} & \begin{pmatrix} 2 & \cancel{3} & \cancel{5} \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{6} \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ukázkový příklad

Mějme matici:

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} -20 & -20 & 10 & 10 \\ -20 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 20 \\ 10 & 10 & 20 & 20 \end{pmatrix} \end{array}$$

Existuje řešení v ryzí strategii (sedlový bod)?

Řešení:

Hráč A hledá minimum v každém řádku.

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} -20 & -20 & 10 & 10 \\ -20 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 20 \\ 10 & 10 & 20 & 20 \end{pmatrix} \end{array}$$

Hráč B hledá maximum v každém sloupci.

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} -20 & -20 & 10 & 10 \\ -20 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 20 \\ 10 & 10 & 20 & 20 \end{pmatrix} \end{array}$$

Výsledkem hry jsou 4 sedlové body. Existuje řešení v ryzí strategii.

Ukázkový příklad

Mějme matici:

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 6 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Existuje řešení v ryzí strategii (sedlový bod)?

Řešení:

Hráč A hledá minimum v každém řádku.

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 6 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Hráč B hledá maximum v každém sloupci.

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 6 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Výsledkem hry je neexistence sedlového bodu. Znamená to, že hra nemá řešení v ryzí strategii a musí se tedy řešit přes smíšené strategie.

Abychom mohli vyřešit úlohu přes smíšené strategie, musíme získat matici typu 2 x m pro hráče A. Znamená to, že musíme určit, s jakou pravděpodobností hráč A zvolí první strategii a s jakou pravděpodobností zvolí druhou strategii. Výsledkem bude cena hry hráče A.

Nyní porovnáme strategie hráče A a vyškrtneme jeho dominovanou strategii. Třetí strategie je „horší“ než druhá strategie, vyškrtneme ji. Získali jsme matici typu 2 x m a můžeme ji řešit přes grafické znázornění.

$$\begin{array}{ccl} & B & \\ A & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 6 & 5 & -2 \\ \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{-3} \end{pmatrix} & \begin{array}{ll} P1 & \rightarrow \text{pravděpodobnost první strategie} \\ (1 - P1) & \rightarrow \text{pravděpodobnost druhé strategie} \\ & \end{array} \end{array}$$

- 1 * P1 + 6 * (1 – P1)

P1 = 0 → 1 * 0 + 6 * (1 – 0) = 6

P1 = 1 → 1 * 1 + 6 * (1 – 1) = 1

- -1 * P1 + 5 * (1 – P1)

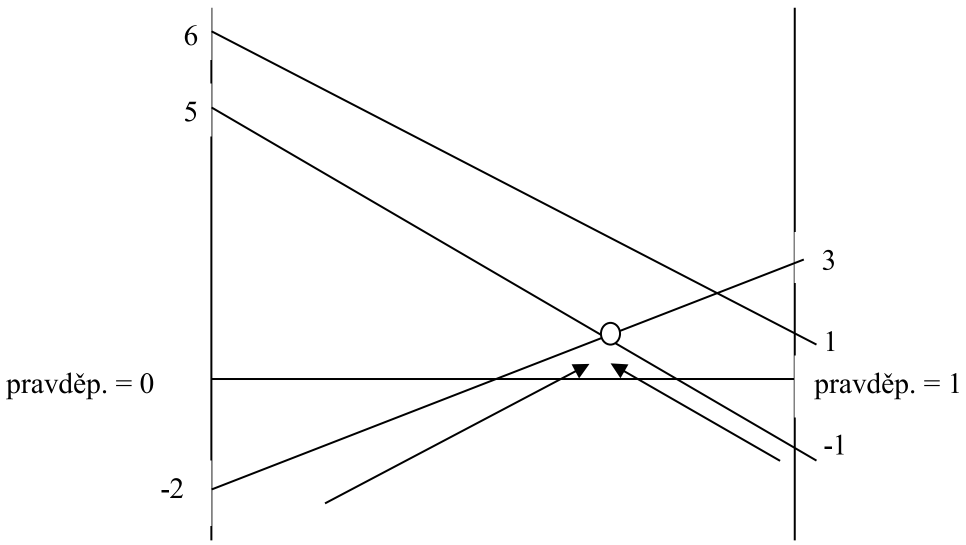
P1 = 0 → -1 * 0 + 5 * (1 – 0) = 5

P1 = 1 → -1 * 1 + 5 * (1 – 1) = -1

- 3 * P1 – 2 * (1 – P1)

P1 = 0 → 3 * 0 – 2 * (1 – 0) = -2

P1 = 1 → 3 * 1 – 2 * (1 – 1) = 3



Hráč A chce vyhrát co nejvíce a chce najít (v grafu) minimální libovolné (očekávané) výhry hráče A, ať už hráč B volil libovolnou strategii a na to tomto grafu najít maximum.

Pokud jsme již určili bod hráče A, dokážeme vypočítat pravděpodobnosti první a druhé strategie. Do rovnosti dosadíme následující vztah:

-P1 + 5 * (1- P1) = 3 * P1 – 2 * (1 – P1)

-P1 + 5 – 5 * P1 = 3 * P1 – 2 + 2 * P1

11 * P1 = 7

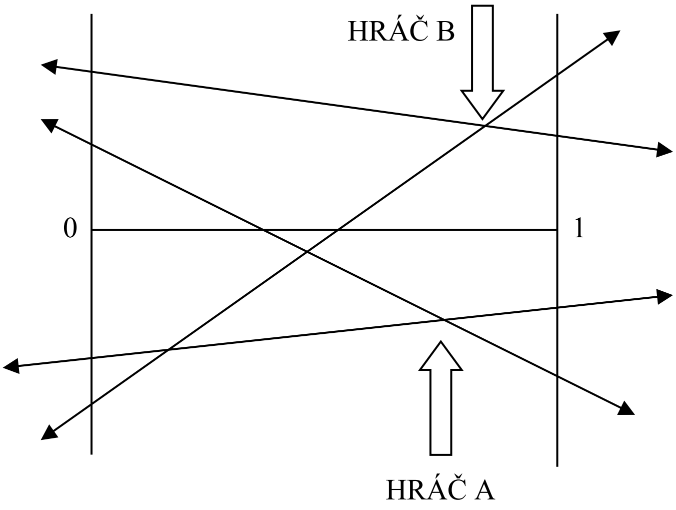
P1 = 7/11 → s pravděpodobností 7/11 hráč A zvolí první strategii

(1 – P1) = 4/11 → s pravděpodobností 4/11 hráč A zvolí druhou strategii

Cena hry (v) = - 7/11 + 5 * (1 – 7/11) = 1,18 nebo 3 * 7/11 – 2 * (1 – 7/11) = 1,18

U ryzí strategie hráči volí konkrétní strategii po celou dobu hry. U smíšené strategie hráči volí své strategie s určitými pravděpodobnostmi, to znamená, že nezůstanou pouze u jedné strategie.

Ukázkový příklad



Určete očekávanou výhru hráče A a očekávané prohry hráče B.

Řešení:

Hráč A chce vyhrát co nejvíce a chce najít (v grafu) minimální libovolné (očekávané) výhry hráče A, ať už hráč B volil libovolnou strategii a na to tomto grafu najít maximum.
Hledáme v grafu maximální očekávané prohry hráče B a na něm zjistit minimum.

Ukázkový příklad

Mějme matici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vyřešte následující úlohu. Stanovte pravděpodobnosti jednotlivých strategií a určete cenu hry.

Řešení:

2 * P1 + 1 * (1 – P1) = 1 * P1 + 3 * (1 – P1)

2 * P1 + 1 – P1 = 1 * P1 + 3 – 3 * P1

3 * P1 = 2

P1 = 2/3

(1 – P1) = (1 – 2/3) = 1/3

Cena hry (v) = 2 * 2/3 + 1 * (1 – 2/3) = 1,67

Hráč A s pravděpodobností 2/3 zvolí první strategii a s pravděpodobností 1/3 zvolí druhou strategii.
Cena hry je 1,67.

Ukázkový příklad

Mějme matici:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Vyřešte následující úlohu. Stanovte pravděpodobnosti jednotlivých strategií a určete cenu hry.

Řešení:

- 5* P1 + 1* (1 – P1)

P1 = 0 → 1

P1 = 1 → 5

- 3 * P1 + 5 * (1 – P1)

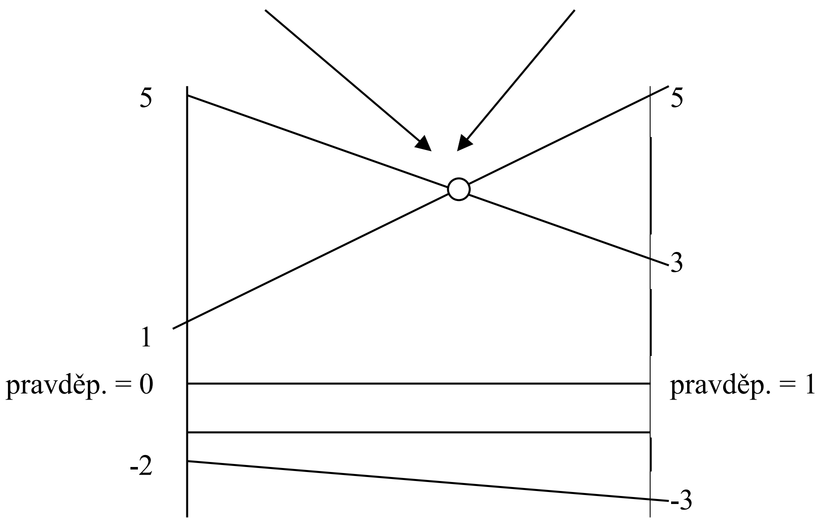
P1 = 0 → 5

P1 = 1 → 3

- -3 * P1 – 2 * (1 – P1)

P1 = 0 → -2

P1 = 1 → -3



Hledáme v grafu maximální očekávané prohry hráče B a na něm zjistit minimum.

5* P1 + 1* (1 – P1) = 3 * P1 + 5 * (1 – P1)

4 * P1 + 1 = -2 * P1 + 5

P1 = 4/6 = 2/3

(1 – P1) = 2/6 = 1/3

Cena hry (v) = 5 * 2/3 + 1* (1 – 2/3) = 3,67

Hráč B s pravděpodobností 2/3 zvolí první strategii a s pravděpodobností 1/3 zvolí druhou strategii. Cena hry je 3,67.

Dvoumaticové hry

Hry 2 hráčů s nekonstantním součtem výplat

Hráč A …. Strategie $A_1, A_2, \dots A_m$

Hráč B …. Strategie $B_1, B_2, \dots B_m$

Výplata hráče A při strategiích A_i, B_j …. $M_1 (A_i, B_j)$

Výplata hráče B při strategiích A_i, B_j …. $M_2 (A_i, B_j)$

$M_1 (A_i, B_j) + M_2 (A_i, B_j) \neq$ konst. = dvoumaticové hry

Výplatní matice hráče A

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & \boxed{-2} \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Výplatní matice hráče B

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & \boxed{1} \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} M_1 (A_2, B_3) = -2 \\ \\ M_2 (A_2, B_3) = 1 \end{matrix}\right\} \quad M_1 (A_2, B_3) + M_2 (A_2, B_3) = -2 + 1 = \mathbf{-1}$$

Dvoumaticové hry mohou být zadány jednou maticí s dvěma čísly, přičemž levé číslo určuje strategii hráče A a pravé číslo představuje hráče B.

$$\begin{pmatrix} 2;1 & -3;-2 & 1;-1 \\ 1;2 & 2;3 & -2;1 \\ 3;4 & 1;-1 & 4;2 \end{pmatrix}$$

Nekooperativní hry

Hledáme rovnovážné strategie A0, B0. Odchýlí-li se jeden hráč od rovnovážné strategie a ten druhý ji zachová, tak ten, který se odchýlil, si pohorší.

Postup při zjišťování rovnovážných bodů:

1. V každém sloupci dvojmatice najdeme největší číslo z levých čísel (hráč A). Dvojice strategií, které odpovídají tomuto číslu, tvoří množinu R_1.
2. V řádcích vybereme největší číslo z pravých čísel (hráč B). Strategie, které odpovídají tomuto číslu, tvoří množinu R_2.
3. Vytvoříme průnik těchto množin $R = R_1 \cap R_2$ a ten je buď prázdný, nebo obsahuje rovnovážné body.

$$\begin{pmatrix} 2;\boxed{1} & -3;-2 & 1;-1 \\ 1;2 & \boxed{2};\boxed{3} & -2;1 \\ \boxed{3};\boxed{4} & 1;-1 & \boxed{4};2 \end{pmatrix}$$

Matice má dva rovnovážné body (Nashův bod). Jestliže získáme více rovnovážných bodů, hledáme dominující rovnovážný bod, tedy (3;4).

Ukázkový příklad

Výplatní matice hráče A

$$\begin{pmatrix} 7 & 10 & 10 \\ 14 & 8 & 14 \\ 13 & 13 & 9 \end{pmatrix}$$

Výplatní matice hráče B

$$\begin{pmatrix} 6 & 8{,}5 & 11 \\ 9 & 8 & 11 \\ 9 & 8{,}5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7;6 & 10;8{,}5 & 10;11 \\ 14;9 & 8;8 & 14;11 \\ 13;9 & 13;8{,}5 & 9;8 \end{pmatrix}$$

Hráč A hledá maximum v každém sloupci a hráč B maximum v každém řádku.

$$\begin{pmatrix} 7;6 & 10;8{,}5 & 10;\boxed{11} \\ \boxed{14};9 & 8;8 & \boxed{14};\boxed{11} \\ 13;\boxed{9} & \boxed{13};8{,}5 & 9;8 \end{pmatrix}$$

Existuje jeden Nashův bod (14;11), hráč A získá 14 při použití druhé strategie a hráč B získá 11 při použití třetí strategie. Každý hráč má jinou výhru, tedy nekonstantní součet.

Ukázkový příklad

$$\begin{pmatrix} 7;6{,}5 & 10{,}5;10 & 10{,}5;11 \\ 10;9 & 7;7 & 10{,}8;11 \\ 13;9 & 13;10 & 9;8 \end{pmatrix}$$

Hráč A hledá maximum v každém sloupci a hráč B maximum v každém řádku.

$$\begin{pmatrix} 7;6{,}5 & 10{,}5;10 & 10{,}5;\boxed{11} \\ 10;9 & 7;7 & \boxed{10{,}8};\boxed{11} \\ \boxed{13};9 & \boxed{13};\boxed{10} & 9;8 \end{pmatrix}$$

Výsledkem hry jsou dva Nashovy body, ale oba nevýhodné pro hráče. Nemůžeme určit dominující rovnovážný bod. V tomto případě by bylo vhodné, aby hráči KOOPEROVALI (spolupracovali). Výplatní matice obou hráčů se sečtou a nalezne se jejich nejvyšší možný společný zisk, který si rozdělí na základě svých jistých (zaručených) zisků. Zaručený zisk u hráče A nalezneme z min hodnoty každého řádku a z minimálních vybereme tu nejvyšší (maximální). U hráče B postupujeme podobně. Min hodnoty se určují z každého sloupce a poté zvolíme max hodnotu. Od společného zisku odečteme zaručené zisky obou hráčů a vydělíme počtem hráčů. V našem případě se jedná o 2 hráče. Následně připočteme zaručený zisk hráče A. Tím získáme celkový zisk hráče A. To samé aplikujeme u hráče B. Součet jejich zisků, se rovná zisku maximálně možného.

$$\begin{pmatrix} 13{,}5 & 18{,}5 & 21{,}5 \\ 19 & 14 & 21{,}8 \\ 22 & \boxed{\mathbf{23}} & 17 \end{pmatrix} \rightarrow \text{maximálně možný zisk obou hráčů}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 10{,}5 & 10{,}5 \\ 10 & 7 & 10{,}8 \\ 13 & 13 & 9 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} 7 \\ 7 \\ 9 \end{matrix}\right\} \text{max} = \mathbf{9} \rightarrow \text{zaručený zisk hráče A}$$

$$\begin{pmatrix} 6{,}5 & 10 & 11 \\ 9 & 7 & 11 \\ 9 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 6{,}5 & 7 & 8 \end{matrix}\right\} \quad \max = \mathbf{8} \rightarrow \text{zaručený zisk hráče B}$$

Rozdělení zisku:

23 – 9 – 8 = 6 / 2 = **3**

Hráč A: 3 + 9 = 12

Hráč B: 3 + 8 = <u>11</u>

23

Hráč A získá 12, hráč B 11.

Příklady na procvičování

Příklad 1

Každý ze dvou hráčů má tři karty označené čísly 1,2,3. Hráč A položí na stůl dvě karty a hráč B, který nezná volbu karet hráče A, položí na stůl jednu kartu. Potom oba hráči zvolené karty ukáží a o výsledku hry rozhodnou takto: představuje-li součet čísel na všech na všech vyložených kartách sudé číslo, vyhrává hráč A tolik korun, kolik činí tento součet. V opačném případě vyhrává hráč B. Stanovte výplatní matici této hry.

/označíme-li symbolem Aji (i=1,2,3, j= 1,2,3, j› i) strategii hráče A, při nichž volí dvojici karet s čísly i,j a symbolem Bk (k= 1,2,3.) strategii hráče B při níž volí kartu s číslem k, výplatní matice hry je:

	B1	B2	B3
A 2,1	4	-5	6
A 3,1	-5	6	-7
A 3,2	6	-7	8

Příklad 2

Dva hráči současně ukáží 1 nebo 2 prsty a současně každý z nich řekne jedno z čísel 2,3,4. Jestliže číslo vyslovené jedním z hráčů se rovná součtu ukázaných prstů obou hráčů, dostane tento hráč od druhého počet korun rovný tomuto číslu. Jestliže oba hráči řeknou správné číslo, výplata každého z nich bude nulová. Každý hráč bude mít nulovou výplatu i v případě, kdy žádný z nich neřekne správné číslo. Stanovte výplatní matici této hry.

/ označíme-li symbolem Aji, Bji strategii hráče A, B, při níž ukáže i prstů (i=1,2) a řekne číslo j, j= 1,2,3,) a uvážíme-li, hráči nevolí strategie A 4,1, A2,2, B4,1, B2, 2, výplatní matice hry je:

	B2,1	B3,1	B3,2	B4,2
A 2,1	0	2	-3	0
A 3,1	-2	0	0	3
A 3,2	3	0	0	-4
A 4,2	0	-3	4	0

Příklad 3

Plukovník Blotto* a jeho protivník útočí na dvě pozice. Plukovník Blotto má k dispozici 3 pluky, jeho protivník 2 pluky. Pozici obsadí ten, kdo na ni soustředí větší počet sil. Výplata na některé pozici se rovná počtu zajatých nebo zničených pluků protivníka zvětšenému o jeden pluk. (obsazení pozice dává vojenskou výhodu odpovídající síle pluku). Stanovte výplatní matici dané konfliktní situace.

* symbolický účastník celé řady ilustrativních příkladů vojenských her, často uváděných v pracích o teorii her.

/ označíme-li symbolem Aji (i=0,1,2,3, j=0, 1,2,3, i+j=3) strategii plukovníka Bloota, při nichž i jeho pluků obsadí pozici 1 a j pluků obsadí pozici 2 a symbolem Bkh (h=0,1,2, k=0,1,2. h+k=2) strategii jeho protivníka, v případě že h pluků pošle na pozici 1 a k na pozici 2, výplatní matice dané konfliktní situace z hlediska plukovníka Bloota je:

	B2,0	B1,1	B0,2
A 3,0	3	1	0
A 2,1	1	2	-1
A 1,2	-1	2	1
A 0,3	0	1	3

Příklad 4

Plukovník Blooto*, má provést přesun svých 4 pluků z pozice A do pozice B, přičemž může užít cesty 1 nebo 2. Protivník, který má k dispozici 3 pluky, se snaží přesun vojsk plukovníka Bloota zabránit. Jestliže se na některé cestě střetne k pluků plukovníka Bloota s r pluky jeho protivníka, prohra plukovníka se rovná k, je-li k≤r, nebo r, je-li k≥r, neboť tolik pluků plukovník Bloot ztrácí v bitvě se svým protivníkem. Stanovte výplatní matici dané konfliktní situace.

/ označíme-li symbolem Aji (i=0,1,2,3,4 j=0, 1,2,3,4 i+j=4) strategii plukovníka Bloota, v případě že po cestě 1 pošle i pluků a po cestě 2 j pluků a symbolem Bkh (h=0,1,2,3 k=0,1,2,3. h+k=3) strategii jeho protivníka, v případě, že po cestě 1 pošle h pluků a po cestě 2 k pluků, výplatní matice dané konfliktní situace z hlediska plukovníka Bloota je ve tvaru:

	B3,0	B2,1	B1,2	B0,3
A 4,0	-3	-2	-1	0
A 3,1	-3	-3	-2	-1
A 2,2	-2	-3	-3	-2
A 1,3	-1	-2	-3	-3
A 0,4	0	-1	-2	-3

Příklad 5

Vedoucí prodejny potravinami v rekreační oblasti objednává na neděli mléko. Ze zkušenosti ví, že za slunečného počasí je spotřeba mléka průměrně 1000 l, za chladného suchého počasí se prodá průměrně 700 l, a za deštivého počasí pouze 500 l. Uvedená množství mléka tedy představují velikosti objednávek. Je-li objednané množství mléka vetší než skutečná spotřeba, prodejna je nucena nechat toto mléko zkysnout, čímž na každém litru ztrácí 1 Euro. Jestliže potřeba mléka převyšuje objednané množství, prodejna ztrácí na každém chybějícím litru 0,5 Euro. (=zisk, který prodejna mohla realizovat). Vyjádřete matematicky závislost ztráty prodejny na rozdílu mezi objednaným množstvím mléka a jeho skutečnou potřebou a záporné hodnoty ztrát prodejny při různých strategiích vedoucího prodejny a přírody zvolte za prvky výplatní matice.

/ označíme-li rozdíl mezi objednaným množstvím mléka a jeho skutečnou spotřebou v litrech písmenem r, ztráta prodejny v Eur se rovná součinu 0,5 $|r|$ pro $r \leq 0$ a číslu r pro $r > 0$. Uvažujeme-li strategie přírody v pořadí slunečno, chladno, deštivo a objednávky mléka vedoucím prodejny v pořadí 500, 700 a 1000 litrů, výplatní matice dané konfliktní situace je tvaru:

$$\begin{bmatrix} -250 & -100 & 0 \\ -150 & 0 & -200 \\ 0 & -300 & -500 \end{bmatrix}$$

/

Příklad 6

Zemědělský podnik se rozhoduje mezi sklizní pšenice třemi způsoby, způsob A, B a C. Volbu způsobu sklizně ovlivňuje především počasí, které může být teplé a minimem srážek, (druh 1), proměnlivé (2), nebo deštivé (3). Hektarové výnosy pšenice (v q) pro různé způsoby sklizně a pro různé druhy počasí jedou uvedeny v tabulce:

	1	2	3
A	25	25	22
B	26,5	26	23
C	26	25	20

Na způsobu sklizně a na počasí závisí kvalita pšenice, která se odráží v její ceně, jak vyplývá z následující tabulky. Údaje v tabulce představují cenu za 1 q v Eur.

	1	2	3
A	180	180	176
B	180	180	176
C	180	176	160

Jestliže se pšenice v uvažovaném podniku sklízí způsobem A, náklady na sklizeň činí 900 Euro. Při způsobu B 500, při způsobu C 600 Euro. Stanovte výplatní matici dané konfliktní situace za předpokladu, že výhrou podniku při jednotlivých strategiích je rozdíl mezi tržbami z 1 ha pšenice a mezi náklady spojenými se sklizní pšenice z 1 ha.

$$/\begin{bmatrix} 3600 & 3600 & 2972 \\ 4270 & 4180 & 3548 \\ 4080 & 3800 & 2600 \end{bmatrix}/$$

Příklad 7

Dokažte, že pro libovolné číslo a má matice

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

sedlový bod.

/ a = 2/

Příklad 8

Stanovte, pro jaké hodnoty čísel a a b má hra s výplatní maticí

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

a) ryzí optimální strategie,

b) řešení ve smíšených strategiích,

c) v případě b určete řešení dané hry.

/ a) $a \leq 0$, b) $ab > 0$, c) $\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}$, a cena hry $\frac{ab}{a+b}$,/

Příklad 9

Řešte hry, jejichž výplatní matice jsou:

a)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 1 \\ -1 & -3 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

c)

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

d)

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

/ a) pro oba hráče je optimální 3. Strategie, cena hry je nulová.

b) pro hráče A je optimální 2 nebo 4. Strategie a všechny konvexní kombinace těchto strategií, pro hráče B je vhodné volit 4 strategii. Ve všech případech je cena hry 1.

c) x_o= (5/6, 1/6), y_o= (1/3, 2/3), v= -7/3

d) x_o= (4/7, 3/7), y_o= (2/7, 5/7), v= -1/7/

Příklad 10

Stanovte optimální strategii hráče B a ceny hry, je-li dána výplatní matice

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

A optimální strategie hráče A x_o= (0, ½, ½),

/ y_o= (0,0,1,0), v= 1/

Příklad 11

Graficky řešte hry zadané výplatními maticemi:

a)

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

c)

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

d)

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

/ a) x_o= (1/3, 2/3), y_o= (2/3, 0, 1/3, 0), v= 0

b) hra má řešení v ryzích strategiích A2, B1, cena hry je 1.

c) x_o= (0,7/8,0,1/8), y_o= (1/2,1/2), v= 3/2

d) pro hráče A je optimální 3 strategie, optimální strategie hráče B představují vektory (3/4,1/4), (1/2,1/2), a každá jejich konvexní kombinace. Ve všech případech je cena hry 1.

Příklad 12

S využitím redukce výplatní matice řešte následující hry:

a)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

c)

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

/ a) x_o= (0,0, 3/5, 2/5), y_o= (1/5, 4/5, 0, 0), v= 7/5

b) x_o= (1/3, 2/3,0,0), y_o= (0, 0, 2/3, 1/3), v= 5/3

c) xo= (4/11, 0, 7/11, 0), y_o= (0, 0, 4/11, 7/11), v= 27/11/

Příklad 13

Každý ze dvou hráčů má tři karty označené čísly 1,2,3. Hráč A položí na stůl dvě karty a hráč B, který nezná volbu karet hráče A, položí na stůl jednu kartu. Potom oba hráči zvolené karty ukáží a o výsledku hry rozhodnou takto: představuje-li součet čísel na všech na všech vyložených kartách sudé číslo, vyhrává hráč A tolik korun, kolik činí tento součet. V opačném případě vyhrává hráč B. Vyřešte tuto hru.

/ x_o= y_o= (1/4, ½, 1/4), v= 0 /

Příklad 14

Plukovník Blotto* a jeho protivník útočí na dvě pozice. Plukovník Blotto má k dispozici 3 pluky, jeho protivník 2 pluky. Pozici obsadí ten, kdo na ni soustředí větší počet sil. Výplata na některé pozici se rovná počtu zajatých nebo zničených pluků protivníka zvětšenému o jeden pluk. (obsazení pozice dává vojenskou výhodu odpovídající síle pluku). Vyřešte tuto hru.

/ x_o= (1/3, 1/5, 0, 7/15), y_o= (1/5, 3/5, 1/5,), v=6/5/

Příklad 15

Plukovník Blooto*, má provést přesun svých 4 pluků z pozice A do pozice B, přičemž může užít cesty 1 nebo 2. Protivník, který má k dispozici 3 pluky, se snaží přesun vojsk plukovníka Bloota zabránit. Jestliže se na některé cestě střetne k pluků plukovníka Bloota s r pluky jeho protivníka, prohra plukovníka se rovná k, je-li $k \leq r$, nebo r, je-li $k \geq r$, neboť tolik pluků plukovník Bloot ztrácí v bitvě se svým protivníkem. Stanovte výplatní matici dané konfliktní situace.

/ x_o= (1/2, 0, 0, 0, 1/2), optimální strategie hráče B představují vektory (0, ½, ½, 0), (1/4, 0, 3/4, 0), (0, ¼, 0, ¾), (1/2, 0, 0, ½) a každá jejich konvexní kombinace, v= -3/2. /

Příklad 16

Hráč A se může skrýt ve třech místech X, Y, Z před hráčem B, který ho v těchto místech hledá. Pro vzájemnou polohu uvedených míst platí: XY =20, XZ =35, YZ =15. Cílem hráče A je zvolit takové místo úkrytu, které by mu zajišťovalo maximální vzdálenost od hráče B. Naproti tomu hráč B se snaží tuto vzdálenost minimalizovat. Stanovte optimální strategie obou hráčů.

/ Je-li pořadí strategií obou hráčů dáno pořadím míst X, Y, Z platí: x_o= y_o= (1/2, 0, 1/2), v= 35/2 /

Příklad 17

Řešte hru v příkladu č. 5 jakož to hru hranou proti přírodě za předpokladu, že uvažované tři typy počasí se vyskytují se stejnou pravděpodobností.

/ Pro vedoucího prodejny je nejvýhodnější objednávat na neděli buď 500 nebo 700 l mléka/

Příklad 18

Hru v příkladu 6 řešte pomocí:

a) principu minimaxu,

b) principu minimaximální ztráty,

c) Bayesova principu za předpokladu, že v uvažované oblasti uvedené typy počasí se v období žní vyskytují s pravděpodobnostmi (0,5, 0,3, 0,2).

/Podle všech uvedených principů je pro daný zemědělský podnik nejvýhodnější způsob B/

Příklad 19

Subdodavatel má na skladě 1000 kusů elektromotorů, které dodává výrobci elektrických praček. Některé z těchto elektromotorů mohou mít skrytou vadu, která se projeví během záruční doby. V tomto případě náklady na výměnu elektromotoru za nový činí 200 Eur. Subdodavatel se rozhoduje, zda má prodat výrobci praček elektromotory za 150 Euro/kus, nebo zda má elektromotory vyřadit do šrotu za 1 Euro/kus. Stanovte optimální rozhodnutí subdodavatele pomocí:

a) principu minimaxu,

b) principu minimaximální ztráty,

c) Bayesova principu za předpokladu, že výskyt každého možného počtu vadných motorů je stejně pravděpodobný,

d) Bayesova principu za předpokladu, že asi 1 % motorů bývá vadných.

/ a) pro subdodavatele bude nejvýhodnější všechny motory vyřadit do šrotu,

b) optimální smíšenou strategií subdodavatele je vektor (149/200, 51/200), který můžeme interpretovat tak, že bude nejvýhodnější přibližně ¾ motorů prodat a ¼ motorů vyřadit,

c) nejvýhodnější bude prodej všech motorů/

Příklad 20

Dvě dostihové stáje soutěží, o kolik vyšší výhru svých koní získají. Uvažují, jaké koně přihlásit na následující dostih. Přitom skuteční velikost možných výher závisí na tom, kterého koně vyšle na dostih druhá stáj. Očekávané výhry obou stájí jsou v následujících tabulkách.

	Stáj B		
		Hedo	Naomi
Stáj A	Cesar	20	4
	Kapo	0	15
	Tomy	8	12

		Stáj A		
		Cesar	Kapo	Tomy
Stáj B	Hedo	10	8	18
	Naomi	12	4	2

Které koně mají proti sobě stáje postavit?

/ Hra nemá sedlový bod, řešení ve smíšených strategiích“ stáj A musí na dostih vyslat své koně s pravděpodobnostmi (0,514, 0,486, 0), stáj B své koně s pravděpodobnostmi (0,514, 0,486). Stáj A pak může čekat vyšší výhru než stáj B o 1.243 tis Kč.

Výplatní matice

$$A = \begin{matrix} 10 & -8 \\ -8 & 11 \\ -10 & 10 \end{matrix}$$

Příklad 21

Při výrobě rour se používá tří druhů železných tyčí, které se nepatrně liší chemickým složením. Tyče přicházejí do skladu nerozlišené a jejich třídění by bylo příliš nákladné. Statistickým šetřením bylo zjištěno, že v předchozích obdobích byly jednotlivé typy tyčí dodávány v poměru 2:3:5. Roury lze vyrábět celkem čtyřmi technologickými postupy, které jsou různě vhodné pro různé chemické složení tyčí. Náklady na výrobu 1 t rour (v peněžních jednotkách) při použití tyčí různého chemického složení a pro různé technologické postupy jsou uvedeny v tabulce:

Druh tyče / Technolog.postup	1	2	3
A	2	3	2,5
B	2	2,5	1,5
C	3	2	2,5
D	2	2	1,5

Úkolem je stanovit takový technologický postup výroby rour, při kterém by očekávané náklady byly minimální. Návod: Za prvky výplatní matice dané konfliktní situace zvolte záporně vzaté náklady na výrobu 1 t rour.

/Optimální technologický postup je D/

Příklad 22

Elektrotechnický podnik může za určité období vyrobit buď 900 kusů televizorů a 800 kusů radiopřijímačů, nebo 600 kusů televizorů a 1600 kusů radiopřijímačů. Vedení podniku nemá přesné informace o cenách televizorů a radiopřijímačů v následujícím roce, ale ví, že s pravděpodobností 2/3 bude cena televizorů přibližně 2500 Euro/ kus a pravděpodobností 1/3 bude tato cena 3000 Euro / kus a že radiopřijímače budou se stejnou 50ti % pravděpodobností prodávány buď za 800 Euro, nebo za 1000 Euro/kus. Předpokládané náklady na výrobu jednoho kusu televizoru jsou 1500 Euro a na výrobu radiopřijímače 500 Euro. Úkolem je stanovit optimální kombinaci výroby televizorů a radiopřijímačů tak, aby podnik měl zaručený očekávaný zisk. Návod: Za strategie přírody volte různé kombinace cen televizorů a radiopřijímačů a předpokládejte, že tyto ceny jsou navzájem nezávislé.

/ Nejvýhodnější je vyrábět 900 kusů televizorů a 800 kusů radiopřijímačů. /

Příklad 23

Pro tři tramvajová depa, která leží v místech A,B,C má být v jednom z těchto míst vybudováno středisko pro opravy a rekonstrukce vozů. Náklady na výstavbu tohoto střediska jsou ve všech místech stejné, takže o jeho umístění rozhodují pouze vzájemné vzdálenosti mezi uvažovanými místy /platí AB = 10 km, AC = 8 km, BC = 12 km/ a potřeba oprav a rekonstrukce tramvají v jednotlivých depech /bylo zjištěno, že z celkového počtu oprav a rekonstrukcí tramvají připadá 1/3 na depo v místě A, 1/6 na depo v místě B a ½ na depo v místě C/. Úkolem je navrhnout opravárenské středisko v takovém místě, aby očekávaný úhrnný počet ujetých kilometrů s vozy do a z oprav a rekonstrukcí do depa byl co nejmenší.

/Středisko oprav a rekonstrukcí v místě C/

Příklad 24

Firmy A a B vyrábějící týž výrobek se rozhodují o jeho ceně, která může být 2000 Kč/kus nebo 2500Kč/kus. Očekávané zisky obou firem jsou pro uvažované kalkulace cen uvedeny (v mil Kč) v následující matici:

V mil Kč.	2000 Kč/kus	2500 Kč/kus
2000 Kč/kus	10;8	17;3
2500 Kč/kus	6;18	15;13

Stanovte pro každou firmu nejvýhodnější cenu výrobku za předpokladu, že obě firmy spolu:

a) nekooperují,

b) kooperují a v tomto případě ještě určete očekávaný zisk každé firmy, jestliže zisk dosažený spoluprací bude mezi obě firmy rozdělen stejným dílem.

/ a) pro obě firmy je nejvýhodnější cena výrobku 2000 Kč,

b) pro obě firmy je nejvýhodnější cena výrobku 2500 Kč, po rozdělení společného zisku bude zisk firmy A 15 mil Kč, firmy B 13mil Kč/

Příklad 25

Mějme matici:

$$
\begin{array}{cc}
 & \mathbf{B} \\
\mathbf{A} & \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 & 0 & 9 \\ 6 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 8 & -3 & 7 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Najděte sedlový bod a určete cenu hry.

/sedlový bod neexistuje/

Příklad 26

Mějme matice:

$$
\begin{array}{cc}
 & \mathbf{B} \\
\mathbf{A} & \begin{pmatrix} 7 & 7 & 8 & 7 & 9 \\ 6 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 8 & -3 & 7 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Existuje řešení v ryzí strategii? Jaká je cena hry? Jakou strategii použije hráč A a hráč B?

/ Řešením jsou dva sedlové body; cena hry 7. Hráč A zvolí první strategii, hráč B zvolí druhou nebo čtvrtou strategii. /

Příklad 27

Mějme matici:

$$\begin{array}{cc} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & 1 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vyřešte danou úlohu v ryzí strategii, popřípadě ve smíšené strategii.

/ První strategii hráč A zvolí s pravděpodobností 0,125, druhou strategii s pravděpodobností 0,875; cena hry 2,75./

Příklad 28

Mějme matici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Vyřešte danou hru.

/ První strategii hráč A zvolí s pravděpodobností 4/11, druhou strategii s pravděpodobností 7/11; cena hry 2,82

Příklad 29

Mějme matici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Vyřešte danou hru.

/ První strategii hráč A zvolí s pravděpodobností 1; cena hry 0./

Příklad 30

Mějme matici:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Vyřešte danou hru.

/ První strategii hráč B zvolí s pravděpodobností 0,8, druhou strategii s pravděpodobností 0,2; cena hry 2,4./

Příklad 31

Mějme hru:

$$\textbf{Hráč A} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{Hráč B} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 4 & 8 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Existuje Nashův bod? Jaké jsou zaručené zisky obou hráčů?

/ Existuje 1 Nashův bod; hráč A 4 (první strategie), hráč B 6 (druhá strategie)./

Příklad 32

Mějme hru:

$$\textbf{Hráč A} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2{,}5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{Hráč B} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2{,}5 & 2{,}5 \end{pmatrix}$$

Řešte úlohu v případě, že hráči nekooperují.

Řešte úlohu v případě, že hráči kooperují.

/V případě nekooperace existují 3 Nashovy body; v kooperaci hráč A získá 4, hráč B 4./

2. Metoda DEA

Příklad 1

K dispozici jsou 4 společnosti v rámci přepravy zboží zákazníkům: A, B, C, D.

V následující tabulce jsou uvedena základní kritéria společností za jeden kalendářní měsíc.

	provozní náklady	počet vozů	počet řidičů	výnosy	provozní zisk	počet obsloužených zákazníků
A	1000000	10	9	3000000	500000	1000
B	1200000	11	11	2000000	600000	1100
C	1100000	15	20	2500000	450000	900
D	1150000	12	15	3200000	900000	1200

Analyzujte hodnocení efektivnosti kritérií jednotlivých přepravních společností metodou BCC, pokud uvažujeme maximalizaci výstupů.

Výsledek:

jednotky (společnosti)	výsledná efektivnost	efektivita -

		splněno/nesplněno
A	100 %	splněno
B	100 %	splněno
C	79,8 %	nesplněno
D	100 %	splněno

Doporučené změny pro jednotku (společnost) C:

Doporučené změny jsou navrhované na základě efektivnosti jednotek A, D (takzvané peer jednotky). Žádná hypotetická jednotka zde neexistuje.

Proměnná (kritérium)	**aktuálně**	**cíl změny**	**procentuální změna**
počet obsloužených zákazníků	900,00	1133,33	25,93 %
počet vozů	15,00	11,33	-24,44 %
počet řidičů	20,00	13,00	-35,00 %
provozní náklady	1100000,00	1100000,00	0,00 %
provozní zisk	450000,00	766666,67	70,37 %
výnosy	2500000,00	3133333,33	25,33 %

Z výše uvedené tabulky lze vypozorovat jednotlivé změny stanovených kritérií. Pro splnění efektivnosti je zapotřebí zvýšit počet obsloužených zákazníků za jeden kalendářní měsíc z 900 na 1134 zákazníků, to je o 25,93 % více. Tabulka uvádí další změny.

Příklad 2

K dispozici jsou 4 společnosti v rámci přepravy zboží zákazníkům: A, B, C, D.

V následující tabulce jsou uvedena základní kritéria společností za jeden kalendářní měsíc.

	provozní náklady	počet vozů	počet řidičů	výnosy	provozní zisk	počet obsloužených zákazníků
A	1000000	10	9	3000000	500000	1000
B	1200000	11	11	2000000	600000	1100
C	1100000	15	20	2500000	450000	900
D	1150000	12	15	3200000	900000	1200

Analyzujte hodnocení efektivnosti kritérií jednotlivých přepravních společností metodou BCC, pokud uvažujeme minimalizaci vstupů.

Výsledek:

jednotky (společnosti)	výsledná efektivnost	efektivita - splněno/nesplněno
A	100 %	splněno
B	100 %	splněno
C	90,9 %	nesplněno
D	100 %	splněno

Doporučené změny pro jednotku (společnost) C:

V rámci minimalizací vstupů se společnosti C doporučují změny dle vzorové (peer) jednotky A.

Následující tabulka uvádí doporučené změny pro společnost C, aby byla efektivní jako ostatní jednotky (společnosti).

Proměnná (kritérium)	aktuálně	cíl změny	procentuální změna
počet obsloužených zákazníků	900,00	1000,00	11,11 %
počet vozů	15,00	10,00	-33,33 %
počet řidičů	20,00	9,00	-55,00 %
provozní náklady	1100000,00	1000000,00	-9,09 %
provozní zisk	450000,00	500000,00	11,11 %
výnosy	2500000,00	3000000,00	20,00 %

Příklad 3

K dispozici jsou 4 společnosti v rámci přepravy zboží zákazníkům: A, B, C, D.

V následující tabulce jsou uvedena základní kritéria společností za jeden kalendářní měsíc.

	provozní náklady	počet vozů	počet řidičů	výnosy	provozní zisk	počet obsloužených zákazníků
A	1000000	10	9	3000000	500000	1000
B	1200000	11	11	2000000	600000	1100
C	1100000	15	20	2500000	450000	900
D	1150000	12	15	3200000	900000	1200

Analyzujte hodnocení efektivnosti kritérií jednotlivých přepravních společností metodou CCR, pokud uvažujeme minimalizaci vstupů.

Výsledek:

Metoda CCR předpokládá konstantní výnosy z rozsahu.

jednotky (společnosti)	výsledná efektivnost	efektivita - splněno/nesplněno
A	100 %	splněno
B	100 %	splněno
C	79,5 %	nesplněno
D	100 %	splněno

Doporučené změny pro jednotku (společnost) C:

V rámci minimalizací vstupů metodou CCR se společnosti C doporučují změny dle vzorových (peer) jednotek A, D.

Následující tabulka uvádí doporučené změny pro společnost C, aby byla efektivní jako ostatní jednotky (společnosti).

Proměnná (kritérium)	**aktuálně**	**cíl změny**	**procentuální změna**
počet obsloužených zákazníků	900,00	900,00	0,00 %
počet vozů	15,00	9,00	-40,00 %
počet řidičů	20,00	10,20	-49,00 %
provozní náklady	1100000,00	875000,00	-20,45 %
provozní zisk	450000,00	600000,00	33,33 %
výnosy	2500000,00	2500000,00	0,00 %

Dle metody CCR by se měly snížit veškeré vstupy (počet vozů, počet řidičů, a tím provozní náklady). Snížením vstupů by se měl tedy provozní zisk zvýšit o 33,33 %.

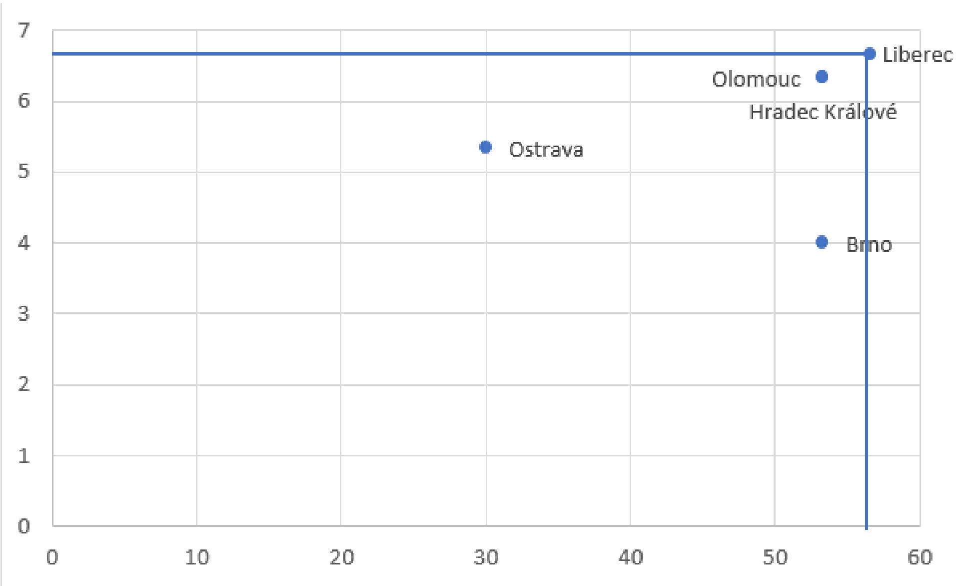
Příklad 5

Pět obchodů z jednoho obchodního řetězce hospodaří se stejným rozpočtem. Jejich výkon se hodnotí podle dosaženého zisku a podle počtu zákazníků, které obchod za sledované období obsloužil. Údaje jsou v tabulce. Použijte výstupově orientovaný model s konstatními výnosy z rozsahu. Vyhodnoďte efektivnost jednotlivých obchodů. Nakreslete graf pro řešení úlohy grafickou metodou.

	Rozpočet (mil. Kč)	Zisk (tis. Kč)	Zákazníků (tis. osob)
Olomouc	3	160	19
Hradec Králové	3	160	19
Brno	3	160	12
Ostrava	3	90	16
Liberec	3	170	20

Výsledek:

Obchody	**Efektivita**
Olomouc	75,1%
Hradec Králové	75,1%
Brno	100%
Ostrava	100%
Liberec	71,2%



Příklad 6

Autoopravny provádějí přípravu aut pro měření emisí. Určte, které autoservisy jsou efektivní. Použijte BCC model orientovaný na výstupy.

	Počet techniků	Počet PC	Počet aut
A	10	6	20
B	3	5	10
C	3	16	30
D	5	14	20
E	6	15	30
F	4	4	10
G	9	4	20
H	5	2	10

Výsledek

Autoopravna	**Efektivita**
A	91,7%
B	100,0%
C	100,0%
D	69,8%
E	100,0%
F	91,7%
G	100,0%
H	100,0%

Příklad 7

Autoopravny provádějí přípravu aut pro měření emisí. Určete, které autoservisy jsou efektivní. Použijte CCR model orientovaný na vstupy.

	Počet techniků	Počet aut	Tržby (v 10 tis. Kč)
A	1	10	2
B	1	8	2
C	2	18	6
D	2	22	5
E	3	21	6
F	1	9	2,7
G	3	12	9

Výsledky:

Autoopravna	**Efektivita**
A	90,9%
B	76,2%
C	100,0%
D	100,0%
E	71,4%
F	94,3%
G	100,0%

Příklad 8

Firma , která se zabývá výrobou a rozvozem pizzy, má na území ČR celkem sedm poboček. Tyto pobočky jsou umístěny ve velkých městech (Praha, Olomouc, Brno, Hradec Králové, Ostrava, Liberec a Plzeň). Majitel firmy se chce ujistit, že tyto pobočky jsou efektivní (popřípadě, jak efektivity jednotlivých poboček dosáhnout). V tomto případě jednotlivé pobočky lze považovat za homegenní jednotky. Hodnoty vstupů a výstupů jednotlivých jednotek jsou uvedeny v tabulce. Použijte model CCR orientovaný na vstupy.

	Praha	Olomouc	Brno	Hradec Králové	Ostrava	Liberec	Plzeň
Počet ujetých kilometrů (v tis. km)	1,9	1,6	1	1,2	0,9	1,4	1,3
Počet zaměstnanců	60	21	19	20	15	23	22
Materiál (v kg)	300	250	286	293	268	245	290
Počet zákazníků	80	88	82	95	78	69	80
Tržby (v tis. Kč)	150	186	169	173	180	195	130

Výsledky

	Počet ujetých kilometrů (v tis. km)	Počet zaměstnanců	Materiál (v kg)	Počet zákazníků	Tržby (v tis. Kč)
Praha	1,9	60	300	80	150
Olomouc	1,6	21	250	88	186
Brno	1	19	286	82	169
Hradec Králové	1,2	20	293	95	173
Ostrava	0,9	15	268	78	180
Liberec	1,4	23	245	69	195
Plzeň	1,3	22	290	80	130

Pobočka	**Efektivita**
Praha	75,9%
Olomouc	100,0%
Brno	96,4%
Hradec Králové	100,0%
Ostrava	100,0%
Liberec	100,0%
Plzeň	83,9%

Příklad 9

Firma, se sídlem v Olomouci, má 5 poboček na území ČR. Firma se zabývá především výrobou hraček. Majitel této firmy chce vědět, zda tyto pobočky pracují efektivně. Dané pobočky firmy lze považovat za homogenní jednotky. Hodnoty vstupů a výstupů jednotlivých jednotek jsou uvedeny v tabulce. Použijte model CCR orientovaný na výstupy.

	Pobočka 1	Pobočka 2	Pobočka 3	Pobočka 4	Pobočka 5
Zákazníci (počet)	5	10	16	20	13
Materiál (v kg)	80	96	115	132	90
Zaměstnanci (počet)	4	6	7	5	8
Tržby (v tis. Kč	50	84	100	78	65

Výsledky

Pobočka	**Efektivita**
1	84,7%
2	100,0%
3	100,0%
4	100,0%
5	99,3%

Příklad 10

Máme zhodnotit efektivitu pěti prodejních skladů, které se liší počtem zaměstnanců, plochou skladu, počtem obsloužených zákazníků a výší tržeb. Údaje o jednotlivých střediscích jsou v tabulce. Použijte model BCC orientovaný na výstupy.

	Zaměstnanci (počet	Plocha skladu ($10m^2$)	Zákazníci (počet)	Tržby (tis. Kč)
S1	2	5	4	10
S2	3	6	10	23
S3	1	3	2	4
S4	5	8	6	13
S5	2	5	4	17

Výsledky:

Sklad	**Efektivita**
S1	70,8%
S2	100%
S3	100%
S4	60%
S5	100%

Příklad 11

Banka chce zhodnotit výkon svých poboček v menších městech. Jako podstatná kritéria si vybrala mzdové a provozní náklady v tis. Kč na pobočce za měsíc, počet běžných účtů osobních, počet běžných účtů firemních a výnosy v tis. Kč za měsíc. Hodnoty vstupů a výstupů jsou uvedeny v tabulce. Použijte model BCC orientovaný na vstupy.

	Mzdové náklady	Provozní náklady	BÚ osobní	BÚ firemní	Výnosy
A	125	5	566	693	449
B	100	4	680	548	362
C	130	5	736	355	446
D	114	2	469	422	403
E	120	6	789	270	385

Výsledky:

Pobočka	Efektivnost
A	100%
B	100%
C	100%
D	100%
E	100%

Příklad 12

Máme zhodnotit efektivitu dopravních podníků 19 vybraných měst. Jejich efektivita se hodnotí podle počtu přepravených osob (tis. osobů, tržeb (tis. Kč), vozových kilometrů (tis.), počtu zaměstnanců, počtu řidičů a vozového parku. Použijte model CCR orientovaný na vstupy.

	Přepravy	Tržby	Vozokm	Zaměstnanci	Řidiči	Vozový park
Brno	352 052	994 040	38 118	2 727	1 375	758
České Budějovice	38 091	129 059	5 673	384	187	141
Děčín	8 938	42 731	3 678	207	132	55
Hradec Králové	35 162	120 854	6 242	401	226	131
Chomutov-Jirkov	5 223	50 367	1 838	253	163	48
Jihlava	13 530	50 232	2 821	170	94	64
Karlovy Vary	13 436	65 174	2 624	260	148	67
Liberec	32 656	192 236	8 648	377	169	207
Mariánské lázně	3 844	11 439	495	30	19	30
Most-Litvínov	27 418	110 059	4 908	471	216	137
Olomouc	52 737	143 318	5 902	432	255	137
Opava	10 750	50 476	3 046	180	115	68

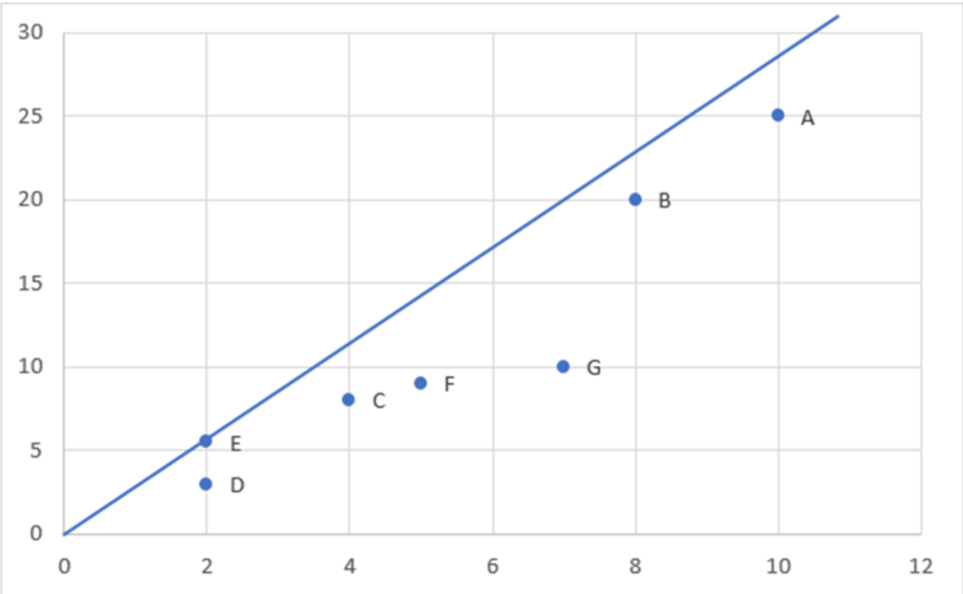
Výsledky:

Dopravní podnik	**Efektivita**
Brno	100%
České Budějovice	87%
Děčín	100%
Hradec Králové	92,4%
Chomutov-Jirkov	80%
Jihlava	90%
Karlovy Vary	76,2%
Liberec	100%
Mariánské lázně	100%
Most-Litvínov	71,9%
Olomouc	95,4%
Opava	87,1%

Příklad 13copravny provádějí přípravu aut pro měření emisí. Určete graficky, které autoservisy jsou efektivní. Uvažujte model s konstatními výnosy z rozsahu.

	Počet techniků	Počet aut
A	10	25
B	8	20
C	4	8
D	2	3
E	2	5,5
F	5	9
G	7	10

Výsledky:



Efektivní je pouze autoopravna E.

3.Teorie hromadné obsluhy

V obchodě je jedna prodavačka, která obslouží zákazníky v průměru za 5 minut. Do obchodu obvykle přichází 9 zákazníků za hodinu.

a) Spočítejte hlavní charakteristiky tohoto systému
b) Jaká musela být intenzita obsluhy, aby pravděpodobnost, že jednotka při vstupu nebude muset čekat byla 50 %.
c) Jaká by musela být intenzita vstupu, aby průměrná doba strávená v systému byla 10 minut?

Řešení:

Intenzita vstupu – $\lambda = 9$

Intenzita obsluhy – μ = 5 minut = 1/12 hod, $\mu = 1/1/12 = 12$

Intenzita provozu – $\rho = \lambda/\mu = 9/12 = 0{,}75$

Průměrný počet jednotek v systému – $\acute{\eta} = \rho/(1-\rho)$, $0{,}75 / 0{,}25 = 3$

Průměrný počet jednotek ve frontě - $\acute{\eta}_f = \rho^2 /(1-\rho) = 0{,}75\ ^2/025 = 2{,}25$

Průměrná doba, kterou jednotka stráví v systému $t_c = 1/(\mu-\lambda) = 1/(12-9) = 1/3$ h = 20 min.

Průměrná doba strávená jednotkou ve frontě $t_f = \lambda/\mu(\mu-\lambda) = 9/12(12-9) = 9/36 = 0{,}25$ h = 15 min

Pravděpodobnost, že jednotka bude čekat nulovou dobu = $\rho_0 = 1-\rho = 1- 0{,}75 = 0{,}25$

b)

Zadané ρ_0 dosadíme do vzorce pro výpočet pravděpodobnosti, že jednotka bude čekat nulovou dobu

$\mu = 9 / 0{,}5 = 18$

Prodavačka by musela obsloužit 18 zákazníků za hodinu, tj, jednoho za 3 1/3 minuty.

c)

Zadané t_0 = 10 (=1/6 hodiny) dosadíme do vzorce pro výpočet průměrné doby strávené v systému a počítáme intenzitu vstupu.

$1/6 = 1/(12- \lambda) = \lambda = 6$

Průměrná intenzita vstupu by musela být 6 zákazníků za hodinu

Příklad 1

Servisní dílna provádí výměnu olejů. Do dílny přijíždějí 3 auta za hodinu. Technici pracují vždy současně jen na jednom autě a výměna oleje jim trvá pr§měrně 15 minut. Určete:

a) Procento využití pracovního času skupiny techniků
b) Průměrný počet aut ve frontě
c) Průměrný čas, který auto ztratí než se dostane na řadu
d) Celkový čas strávený v servisu (tj čas ve frontě + doba servisu)

Výsledky:

A) 75 %
B) 2,25 aut
C) 45 min
D) 1 hodina

Příklad 2

Místní cukrárna se rozhodla zavést novou službu – prodej zmrzliny okénkem přímo do auta. Prodej jedné porce zmrzliny trvá 45 sekund a očekává se , že zákazníci budou přijíždět každých 50 sekund. K naplánování venkovního prostoru pro auta je třeba zodpovědět následující otázky:

a) Jaká bude průměrná délka fronyt (kolik aut)
b) Průměrný počet aut v systému
c) Jaká je pravděpodobnost, že v systému bude víc jak 10 jednotek ?

Výsledky:

a) Přibližně 8 aut
b) 9 aut
c) 31,4 %

Příklad 3

V cukrárně bude samoobslužný automat na kávu. Předpokládá se, že budou chodit 3 zákazníci za minutu a kávu si připraví sami za 15 sekund.

a) Kolik se dá očekávat zákazníků kolem automatu (ve frontě + přímo u automatu)
b) Jak dlouhá doba uplyne od vstupu do cukrárny do získání šálku kávy ?
c) Na kolik procent bude automat využit ?

d) Jaká pravděpodobnost ,že u automatu budou 3 zákazníci ?

Výsledky:

a) 3 zákazníci
b) 1 minuta
c) 75 %
d) 31,6 %

Příklad 4

Na konci lhůty pro podání daňového přiznání přichází do podatelny průměrně jeden klient za 12 minut, přičemž kontrola a potvrzení trvá 10 minut. Pokud jste se rozhodli vydat na úřad uvažte:

a) Kolik času si musíte rezervovat na podání daňového přiznání ?
b) Jak velká by měla být čekárna (kolik míst) při průměrném provozu ?
c) Podatelna je otavřená 12 hodin denně, jak dlouho přílušný úředník skutečně pracuje ?
d) Jaká je pravděpodobnost, že nebudete čekat vůbec

Výsledky:

a) 1 hodina
b) 4,16 místa -- 5 míst
c) 10 hodin
d) 16,6 % (1:6)

Příklad 5

Na slavnosti se bude podávat pivo zdarma. Každých 15 sekund se najde někdo žíznivý. Obsluha je schopná natočit 6 piv za minutu.

a) Kolik zájemců bude průměrně ve frontě
b) Jaká je pravděpodobnost, že ve frontě budou 2 a více lidí ?
c) Jak dlouho si myslíte, že na pivo budete čekat

Výsledky:

a) 4/3

b) 12/27
c) Ve frontě 45 sekund, v systému 1 minutu

Příklad 6

Na pouti půjčují elektromobily, které majitelům přinášejí zisk 600 Kč za hodinu. Bohužel jsou často mimo provoz, během jedné hodiny mají poruchu v průměru 2 auta. Opravář si účtuje 150 Kč za hodinu. Je možné najmout jednoho opraváře, nebo dva, nebo tři, kteří budou pracovat společně. Jeden opraví auto za 30 minut, dva za 20 minut, tři za 15 minut. Kolik opravářu je z hlediska minimalizace nákladů a ušlého zisku nejvýhodnější ?

Výsledky:

1 pracovník – fronta nade všechny meze

2 pracovníci - ztráty + náklady 1500 Kč

3 pracovníci – ztráty + náklady 1050 Kč

- Nejvýhodnější jsou tedy 3 opraváři.

Příklad 7

V tunelu se vybírá mýtné. Předpokládá se průjezd 750 aut za hodinu. Výběr poplatku trvá 4 sekundy

a) Jaké je využití pracovní doby výběrčího
b) Jak dlouho trvá než se dostanete do tunelu ?
c) Kolik aut bude v systému
d) Jaká je pravděpodobnost, že v systému budou více než 4 auta ?

Výsledky

a) 83,3 %
b) Cca 24 sekund
c) 5 aut
d) 40,2 %

4. Použitá literatura

1. Vaněčková E. Rozhodovací modely. České Budějovice 1998, Jihočeská Univerzita v Českých Budějovicích, Zemědělská fakulta. 80-7040-258-X

2. Šubrt T a kol.., Ekonomicko- matematické metody, Plzeň, 2011, 978-80-7380-345-2