



Zlepšení průchodnosti studijních programů II

IGS 8210-018

Řešitelé:

Ing. Květa Papoušková

RNDr. Jana Vysoká, Ph.D.

Bc. Tereza Sýkorová

Obsah

- 1 Původní záměr projektu
 - 1.1 Plánované výstupy
 - 1.2 Cíle řešení
- 2 Průběh a splnění projektu
 - 2.1 Materiál a metodika řešení
 - 2.2 Harmonogram projektových prací
 - 2.3 Konkrétní výstupy projektu
 - 2.4 Diskuse výstupů
 - 2.5 Hlavní přínosy řešení
- 3 Závěr
- 4 Použité zdroje

1 Původní záměr projektu

Projekt interního grantu je součástí vytvářeného dlouhodobého plánu činnosti katedry v rámci VŠTE v oblasti výuky a rozvoje. Primárně se zaměřuje na zlepšení průchodnosti předmětů zajišťovaných Katedrou informatiky a přírodních věd (dále jen KIPV).

Cílem současného projektu je vydání publikace a rozšíření publikační činnosti pracovníků KIPV. Jedná se o navázání na projekt interního grantu č. *IGS 8210-012 Zlepšení průchodnosti studijních programů* z roku 2019.

Výstupem zmíněného projektu jsou materiály pro studenty bakalářských studijních programů. Konkrétně se jedná o předmět Základy kombinatoriky a pravděpodobnosti (dále jen ZKP), jehož pilotní verze byla spuštěna v letním semestru akademického roku 2019/2020.

Společně s tímto materiálem bylo spojeno vydání podobného výukového materiálu pro předmět Základy matematiky (dále jen ZAM). Tento materiál je koncepčně řešen totožným způsobem jako materiál pro předmět ZKP a vzhledem ke stejným úkonům bylo využito synergie procesů pro vydání materiálů obou předmětů.

Jedná se o podporu pedagogické práce akademických pracovníků a profilace a vytvoření studijních materiálů na úrovni předmětů zajišťovaných na VŠTE.

1.2 Plánované výstupy

- Kontrola správnosti a užitnosti materiálů pro studenty a vyučující předmětu ZKP,
- doplnění materiálu pro předmět ZAM o teorii a řešené příklady,
- vydání příkladové části učebních materiálů pro předmět ZKP včetně teorie a řešených příkladů,
- vydání příkladové části učebních materiálů pro předmět ZAM včetně teorie a řešených příkladů.

1.3 Cíle řešení

Cílem interního grantu vedeného pod názvem „Zlepšení průchodnosti studijních programů II“ bylo vydání aktuálních, kvalitních a dostupných publikací pro studenty VŠTE související se dvěma předměty nabízenými Katedrou informatiky a přírodních věd.

Dalším cílem projektu bylo zvýšit publikační činnost akademických pracovníků a získání zkušeností v projektových činnostech.

2 Průběh a splnění projektu

2.1 Materiál a metodika řešení

Finanční prostředky přidělené v rámci interního grantu byly využity na nákup odborných publikací vyhodnocených předběžným rešeršním šetřením jako vhodných pro tvorbu studijních materiálů. V současné době jsou tyto publikace k dispozici vyučujícím KIPV.

Dále byly finanční prostředky využity na proplacení recenzních posudků, tisk a vydání dvou učebnic pro volitelné předměty ZAM a ZKP, které jsou určeny k přímému prodeji studentům prostřednictvím knihovny VŠTE. Zbývající náklady na tisk byly hrazeny z projektu ID 8210-004 a katedrálních zdrojů.

Původně plánovaná částka na grafické úpravy učebnic nebyla realizována. Řešitelky provedly daný úkon svépomocí. Částka byla převedena z projektu ID 8210-018 na projekt ID8210-007, kde byla využita na nákup odborné cizojazyčné literatury.

2.2 Harmonogram projektových prací

04-07/2020

- Úprava a kontrola studijního materiálu předmětu ZKP
- Doplnění sbírky příkladů ZAM o teoretickou část a řešené příklady
- Typografická a jazyková úprava

07-08/2020

- Grafický návrh titulních stran publikací
- Výběr recenzentů a předání připravených materiálů k recenzím
- Výběr vhodného dodavatele výroby publikací

09-10/2020

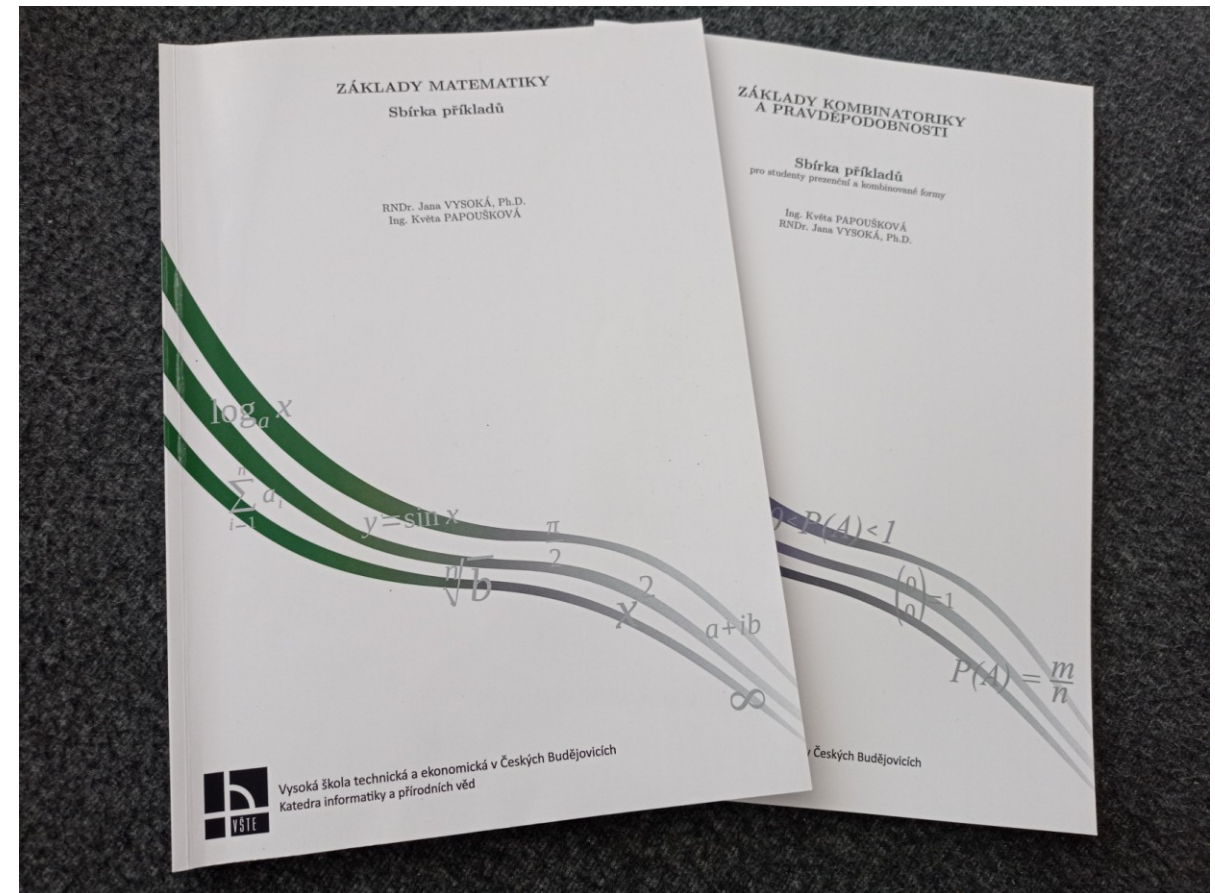
- Dočerpání prostředků projektu
- Zapracování připomínek z recenzních posudků
- Vydání učebnic k předmětu ZKP a ZAM
- Předání k přímému prodeji knihovně VŠTE
- Závěrečná zpráva o řešení projektu

2.3 Výstupy projektu

Stěžejním výstupem grantu jsou dvě učebnice vydané pod záštitou VŠTE:

- **Základy matematiky: Sbíрка příkladů;** RNDr. Jana Vysoká, Ph.D., Ing. Květa Papoušková, 2020, 94 stran, ISBN 978-80-7468-169-1
- **Základy kombinatoriky a pravděpodobnosti: Sbíрка příkladů pro studenty prezenční a kombinované formy;** Ing. Květa Papoušková, RNDr. Jana Vysoká, Ph.D., 2020, 77 stran, ISBN 978-80-7468-168-4

Vydané učebnice jsou v souladu s vizuálním náhledem VŠTE. Obě publikace jsou dostupné k nahlédnutí u asistentky KIPV Bc. Terezy Sýkorové a k zakoupení pro studenty a veřejnost v knihovně VŠTE.



Vydané učební materiály odráží sylaby předmětů Základy kombinatoriky a pravděpodobnosti s kódem ZKP a Základy matematiky s kódem ZAM.

Sylabus předmětu ZKP dle ISu:

1. Faktoriál čísla, kombinační čísla a jejich vlastnosti
2. Rovnice s kombinačními čísly
3. Pravidlo kombinatorického součtu a součinu
4. Variace
5. Permutace
6. Kombinace
7. Pravděpodobnost - vlastnosti
8. Pravděpodobnost náhodného jevu
9. Statistická pravděpodobnost
10. Podmíněná pravděpodobnost
11. Pravděpodobnost průniku
12. Pravděpodobnost sjednocení jevů
13. Nezávislé pokusy

1 Kombinatorika	7	5 Operace s jevy	45
1.1 Faktoriál čísla	7	5.1 Základní pojmy	45
1.2 Rovnice s faktoriálem	10	5.2 Doplnkový jev	48
1.3 Základní kombinatorická pravidla	11	5.3 Variace doplnkového jevu	49
2 Variace	13	5.4 Kombinace doplnkového jevu	50
2.1 Variace bez opakování	13	6 Pravděpodobnost	51
2.2 Variace s opakováním	16	6.1 Definice pravděpodobnosti	51
2.3 Variace s nulou či podmínkou	18	6.2 Mince nebo děti	54
2.4 Dělitelnost	20	6.3 Pravděpodobnost výběru ze skupiny	57
3 Permutace	23	6.4 Krychle	60
3.1 Permutace bez opakování	23	6.5 Pravděpodobnost výběru čísla	62
3.2 Permutace s opakováním	25	6.6 Hody kostkami	63
4 Kombinace	27	6.7 Pravděpodobnost výběru ze skupiny se součinem	66
4.1 Kombinační čísla a jejich vlastnosti	27	7 Podmíněná pravděpodobnost, doplnkový jev	69
4.2 Rovnice s kombinačními čísly	31	7.1 Pravděpodobnost doplnkového jevu	69
4.3 Kombinace bez opakování	33	7.2 Variace v pravděpodobnosti doplnkového jevu	70
4.4 Kombinace bodů	36	7.3 Kombinace v pravděpodobnosti doplnkového jevu	72
4.5 Kombinace s opakováním	38	7.4 Odvození vztahu pro výpočet podmíněné pravděpodobnosti	74
4.6 Kombinace se součinem	40		
4.7 Kombinace se součtem	42		

Ukázka teorie a řešených příkladů (podkapitola 4.6) dle [1]:

- Karkulka se rozhodla koupit babičce tři flašky vína. Kolik má možností, jestliže v Jednotě mají 7 druhů vín.
[84]
- Pan Vorel hodlá vybavit firmu sedmi mobilními telefony a může si vybrat celkem z pěti druhů. Kolik má možností výběru?
[330]
- Pan ředitel hodlá zakoupit 15 hodin řízených rádiovým signálem. Má na výběr z 6 barev. Kolik má možností výběru?
[15504]
- Určete počet všech Apolloniových úloh.
[10]

4.6 Kombinace se součinem

V následujících dvou kapitolách se budeme zabývat výběrem prvků ze skupiny. Základem bude uvědomit si, kolik prvků patří ke kterému druhu a jaký je případný celkový počet těchto prvků. Dále využijeme znalosti kombinatorického pravidla součinu. Jediný rozdíl spočívá ve způsobu výpočtu, kde místo přirozených čísel počítáme s čísly kombinačními.

Ukázkový příklad

Tělesné výchovy 6.C se zúčastnilo 14 děvčat a 11 chlapců. Kolika způsoby lze vybrat 5-ti členné družstvo tak, aby v něm byly:

- právě dvě dívky,
- právě dva chlapci?

Řešení

Nejprve provedeme analýzu odpovědí na otázky:

- Záleží na pořadí prvků?
Nezáleží. Jen máme přesně danou část družstva, ale je jedno, kdo bude zvolen první a kdo poslední.
- Mohou se prvky opakovat?
Ne. Každý je na palubovce sám za sebe.

Dle zjištění se jedná o kombinace bez opakování - nezáleží na pořadí prvků, prvky se nemohou opakovat. Dále stanovíme pro jednotlivá zadání n a k . S výhodou můžeme použít kombinatorické pravidlo součinu.

Proč právě kombinatorické pravidlo součinu? To je snadné. Z definice tohoto pravidla je zřejmé, že výběrem jednoho prvku jsme ovlivnili zbývající soubor prvků, který bude o jednoho chlapce (či dívku) menší.

- právě dvě dívky

Pokud si představíme, jaké bude mít takové družstvo složení, dostaneme se k následujícímu závěru:



Tvoříme tedy dvojice děvčat z celkového počtu 14 a trojice chlapců z celkového počtu 11. Pro každé pohlaví stanovíme jedno kombinační číslo, které použijeme pro kombinatorické pravidlo součinu. Zápis takového výpočtu tedy bude následující:

$$\begin{aligned} K(2, 14) \cdot K(3, 11) &= \binom{14}{2} \cdot \binom{11}{3} = \\ &= \frac{14!}{2! \cdot (14-2)!} \cdot \frac{11!}{3! \cdot (11-3)!} = \\ &= \frac{14 \cdot 13 \cdot 12!}{2 \cdot 1 \cdot 12!} \cdot \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8!} = 15015 \end{aligned}$$

V tomto případě tedy existuje celkem 15015 způsobů, jak vybrat pětičlenné družstvo, ve kterém jsou právě dvě dívky.

- právě dva chlapci Znovu si znázorníme, jaké složení bude mít uvažované družstvo:



Postup výpočtu je shodný s předchozím. Nyní uvažujeme dvojice chlapců, které vybíráme z celkového počtu 11 a trojice děvčat ze skupiny o počtu 14.

$$\begin{aligned} K(2, 11) \cdot K(3, 14) &= \binom{11}{2} \cdot \binom{14}{3} = \\ &= \frac{11!}{2! \cdot (11-2)!} \cdot \frac{14!}{3! \cdot (14-3)!} = \\ &= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9!}{2 \cdot 1 \cdot 9!} \cdot \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 11!} = 20020 \end{aligned}$$

Jsme schopni vytvořit celkem 20020 pětičlenných družstev tvořených právě dvěma chlapci.

Sylabus předmětu ZAM dle ISu:

1. Početní operace se zlomky, úprava složených zlomků, mocniny a odmocniny
2. Úprava algebraických výrazů, využití vzorců
3. Řešení rovnic, vyjadřování ze vzorce, rovnice s absolutní hodnotou
4. Kvadratická rovnice, dělení polynomů, polynomické rovnice, Hornerovo schéma
5. Exponenciální a logaritmické rovnice, definice logaritmu
6. Goniometrické rovnice
7. Komplexní čísla, algebraický tvar, goniometrický tvar, Moivreova věta
8. Grafy elementárních funkcí
9. Grafy pokročilých funkcí
10. Nerovnice, definiční obor
11. Transformace grafů
12. Inverzní funkce
13. Aplikované úlohy

Obsah učebnice předmětu ZAM dle [2]:



1 Zlomky, mocniny, odmocniny	7	8 Definiční obor funkce, nerovnice	61
1.1 Početní operace se zlomky	7	8.1 Nerovnice	61
1.2 Mocniny s celočíselným exponentem	9	8.2 Definiční obor funkce	63
1.3 Odmocniny	12	9 Inverzní funkce	65
1.4 Mocniny s racionálním exponentem	15	9.1 Prostá funkce	65
2 Výrazy	17	9.2 Graf inverzní funkce	67
2.1 Úprava algebraických výrazů	17	9.3 Určení předpisu inverzní funkce	69
2.2 Lomené výrazy	19	9.4 Definiční obor a obor hodnot funkcí f a f^{-1}	72
3 Lineární rovnice	25	10 Grafy elementárních funkcí	73
3.1 Jednoduché lineární rovnice	25	10.1 Lineární funkce	73
3.2 Vyjadřování neznámé ze vzorce	26	10.2 Kvadratická funkce	75
3.3 Rovnice s absolutní hodnotou	27	10.3 Lineární lomená funkce	79
3.4 Iracionální rovnice	30	11 Grafy pokročilých funkcí	83
4 Polynomické rovnice	33	11.1 Exponenciální a logaritmická funkce	83
4.1 Kvadratické rovnice	33	11.2 Goniometrické funkce	86
4.2 Polynomy	36	12 Transformace grafů funkcí	89
4.3 Polynomické rovnice	37	12.1 Lineární a kvadratická funkce	89
5 Exponenciální a logaritmické rovnice	39	12.2 Lineární lomená funkce	90
5.1 Exponenciální rovnice	39	12.3 Exponenciální a logaritmická funkce	91
5.2 Logaritmus	41	12.4 Goniometrické funkce	92
5.3 Logaritmické rovnice	44		
6 Goniometrie	47		
6.1 Úhel a jeho velikost	47		
6.2 Součtové vzorce	51		
6.3 Goniometrické rovnice	52		
7 Komplexní čísla	57		
7.1 Algebraický tvar komplexního čísla	57		
7.2 Mocniny imaginární jednotky	58		
7.3 Kvadratické rovnice s řešením v oboru komplexních čísel	59		

Jedním z cílů projektu bylo doplnění sbírky příkladů o teorii a řešené příklady. Zde je ukázka podkapitoly 5.3 dle [2].



5.3 Logaritmické rovnice

Logaritmické rovnice upravujeme na vhodný tvar pro „odlogaritmování“ - získání jednoduššího tvaru rovnice. Odstranění logaritmu probíhá pomocí vět o logaritmech a definice logaritmu (viz kapitola 5.2).

Nejprve musíme stanovit podmínky, za kterých jsou logaritmy v rovnici definovány. Funkce ve tvaru

$$\log_z x = y$$

je definována pro $x > 0$, $z > 0$, $z \neq 1$.

V případě většího počtu podmínek je nutné určit průnik těchto množin. Kořeny rovnice ležící mimo interval splňující všechny podmínky zároveň nemůžou být řešením rovnice.

Řešené příklady

1. Řešte logaritmickou rovnici s neznámou $x \in \mathbb{R}$ a uveďte podmínky, za nichž je daná rovnice řešitelná.

$$\begin{aligned} \log(x-3) + 2 &= \log x + 3 \\ \log(x-3) - \log x &= 1 \\ \log \frac{x-3}{x} &= 1 \\ \frac{x-3}{x} &= 10^1 \\ x-3 &= 10x \\ -9x &= 3 \\ x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Podmínky, které musí být splněny, aby byly logaritmy definovány, jsou $x > 3$ a zároveň $x > 0$. Řešení tedy musí ležet v intervalu $(3; \infty)$. Výsledný kořen rovnice není prvkem tohoto intervalu. Rovnice nemá řešení.

$$K = \emptyset$$

2. Řešte logaritmickou rovnici s neznámou $x \in \mathbb{R}$ a uveďte podmínky, za nichž je daná rovnice řešitelná.

$$\begin{aligned} \frac{\log(5x-6)}{\log x} &= 2 \\ \log(5x-6) &= 2 \log x \\ \log(5x-6) &= \log x^2 \\ 5x-6 &= x^2 \\ 0 &= x^2 - 5x + 6 \\ D &= 25 - 24 = 1 \\ x_{1,2} &= \frac{5 \pm 1}{2} \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Podmínky, které musí být splněny, aby byly logaritmy definovány, jsou $x > 0$, $x > \frac{6}{5}$ a zároveň $x \neq 1$. Řešení tedy musí ležet v intervalu $(\frac{6}{5}; \infty)$. Výsledné kořeny rovnice jsou prvky tohoto intervalu.

Zásadním krokem při řešení logaritmických rovnic je zkouška.

$$\begin{aligned} L(2) &= \frac{\log(5 \cdot 2 - 6)}{\log 2} = 2 \\ P(2) &= 2 \\ L(2) &= P(2) \\ L(3) &= \frac{\log(5 \cdot 3 - 6)}{\log 3} = 2 \\ P(3) &= 2 \\ L(3) &= P(3) \end{aligned}$$

Řešením rovnice jsou oba kořeny.

$$K = \{2; 3\}$$

2.4 Diskuse výsledků

Jedná se o výstupy k předmětům, na něž navazují předměty náročné. Obzvláště v době distanční výuky jde o jednoduchý a dostupný materiál pro řadu studentů i vyučujících bez dodatečného vyhledávání problematiky.

Materiál k předmětu ZAM byl využit ve výuce po dobu tří semestrů. Jeho doplnění o teorii a řešené příklady a následné vydání bylo logickým krokem navazujícím na předchozí projekční práci v rámci IGS.

Materiál k předmětu ZKP byl poprvé použit v letním semestru akademického roku 2019/2020. Částečně se jednalo o prezenční výuku. Od 4. týdne bylo vzhledem k opatřením vlády ČR nutné přejít na výuku distanční. Během prezenční výuky probíhaly hodiny za téměř plné účasti studentů. V době distanční výuky byli studenti odkázáni na samostudium a on-line konzultace. Výstup z IGS 8210-012/2019 byl studenty velmi dobře hodnocen a nebylo zapotřebí vyhledávat další příklady ani doplnění k teorii.

Obě učebnice (ZAM i ZKP) prošly kvalifikovaným recenzním posouzením. Přípomínky byly před vydáním zapracovány. Vydání publikací proběhlo v souladu s plánovaným termínem dokončení 31. října 2020.

Neinvestiční položky byly použity na nákup odborné literatury a odměny pro recenzenty.

2.5 Hlavní přínosy řešení

Nově vzniklý předmět Základy kombinatoriky a pravděpodobnosti (ZKP) svou náplní splňuje předpoklady, jež jsou v souladu se sylaby předmětů Statistika (STA, STA_z), Teorie rozhodování (N_TOR) a Operační výzkum 2 (OVY_2z) dané prerekvizitami těchto předmětů. Vzniklá učebnice je pomocnou oporou ke studiu a zároveň i pro samotnou výuku vedenou akademickými pracovníky VŠTE, zejména pro zajištění homogenity výuky.

Předmět ZAM je trvale zakotven v nabídce (KIPV). Vzniklá publikace bude nápomocna pro zajištění homogenity výuky a zpřístupnění kvalitních a ucelených studijních materiálů studentům.

Významným přínosem je získání zkušeností členů týmu s řešením projektů s ohledem na možnosti dalšího působení v projektové činnosti a profesní růst zúčastněných akademických pracovníků.

3 Závěr

Cíle projektu se podařilo splnit dle původního záměru. Vydané publikace jsou podporou dlouhodobého záměru KIPV a možností, jak zvýšit průchodnost náročnějších předmětů zajišťovaných touto katedrou. Finanční prostředky byly využity nebo přesměrovány na jiný projekt v rámci poskytnutých IGS 2020 v požadovaném termínu.

4 Použité zdroje

- [1] Papoušková, K., Vysoká, J. 2020. *Základy kombinatoriky a pravděpodobnosti: Sbíрка příkladů pro studenty prezenční a kombinované formy*. České Budějovice: Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích. ISBN 978-80-7468-168-4
- [2] Vysoká, J., Papoušková, K. 2020. *Základy matematiky: Sbíрка příkladů*. České Budějovice: Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích. ISBN 978-80-7468-169-1